数学の中の無限 — 無限の中の数学[*1]

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

(2018 年 4 月 8 日 版)

本稿は 2004 年 5 月 19 日に中部大学情報工学科一年の学生のために行なった総合科目の講義「数学の中の無限」を再現し，第 3 節の後半と第 4 節の内容を補筆したものです．当日は講義の後に，「難しすぎた」という感想を言っていくれた受講者が何人かいたのですが，自分としては中学生でも十分フォローできるような内容になるよう十分吟味して準備していたつもりだったので，この反応にはちょっとがっかりしました．でも，もしかすると，私の話し方が速すぎたことが，難しすぎるという印象を与えてしまった一因だったかもしれません．私は東京とベルリンという大都市の早口文化の中で生れ育ち長く暮してきたので，私の普通に話したときの話の速度，つまり

$$\frac{\text{話の内容の密度}}{\text{時間}}$$

の値は，愛知県の平均よりずっと大きなものになってしまっているのではないかと思うのです．学部学生のための講義などでは，十分セーブして，自分としては失速しそうに思えるくらいの速度で話しているつもりなのですが，乗ってくるとつい自分の本来のペースに近づいてしまいがちです．文章の場合には早口になってしまうことはないし，とりあえず講義のような時間の制限もないので，このような心配はありません．

本稿でも，前半は「中学生でもわかる」というスタンスは保持していますが，後半では高校程度の知識が必要になると感じられるところが二三ヶ所出あるかもしれません．また，第 4 節では記述はかなり発散したものになっています．もちろんそこでも話を追いやすい書き方を工夫したつもりですが，高度な内容を示唆するにとどまっていることもあるので，書いたことの裏にある実質的な内容を本当に理解するのには，文献表であげたような集合論の教科書を読むことが必要でしょう．効率よく理解するには，集合論の講義を聞くことができればそれが一番手っ取り早いの

[*1] http://fuchino.ddo.jp/chubu/infinity-LN.pdf

でしょうが，残念ながら日本の大学で学部の講義として集合論の講義が開講されているところは，私の知るかぎり一つもありません[*2]．

1　初等数学の中の無限

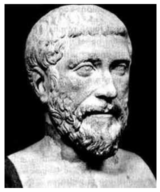
数学は実は「無限」とのかかわりがとても深い学問です．こう言うと，不思議に思う人もいるかもしれません．「数学と無限と，いったいどんな関係があるっていうの？！」そこでまず初等数学（中学生くらいで習うようなこと）の中から数学の無限とのかかわりを見てみようと思います．

まず最初に，ピタゴラスの定理を例にとってみましょう．今の中学校の教科書での扱かいはどうなっているのか分りませんが，少なくともちょっと年配の人は，中学校で習った数学というとピタゴラスの定理を思いうかべる人が多いのではないかと思います．私がまだベルリンに住んでいたころ，相米慎二監督の「台風クラブ」という 1984 年の映画のドイツ語吹替えをテレビで見たことがありました．この映画の中で数学の授業の場面があって，そこで三浦友和の扮するダメ教師が説明していたのも，ピタゴラスの定理で，吹替えのドイツ語の „Pythagoreisch“ という単語のものものしい発音と先生役の友和君の画像のミスマッチがなんともおかしくて，この吹替えでの発音が今でも耳に残っています．

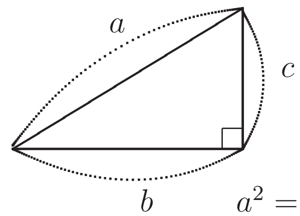
ピタゴラスの定理は，

定理 1 (ピタゴラスの定理) 直角三角形の直角をはさむ二辺のそれぞれの長さの 2 乗の和は他の辺の長さの 2 乗に等しい．

[*2]たとえば「集合と位相」というような名称の講義は多くの大学で開講されていますが，そのような講義の多くでの「集合」の扱かいは，集合の概念を用いた数学的な記述の方法についての説明が主で，集合論について述べられることはほとんどないと思います．誤解のないようにもう一言付け加えておくと，ここで，「集合論について述べられることはほとんどない」と言っているのは，“集合論の講義” には，少なくとも無限組合せ論の基礎や内部モデルの理論と強制法の理論の入門くらいは含まれているべきだけれど，そのような内容の講義は日本の大学ではどこにも開講されていない，という意味です．



ピタゴラス (Pythagoras)

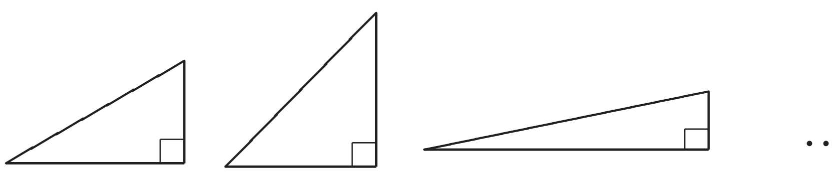


$a^2 = b^2 + c^2$

というものでしたね．ピタゴラスは紀元前 569 年ごろイオニアのサモス島に生れて紀元前 475 年ごろ亡くなっている古代ギリシャの数学者です．ピタゴラスの定理自身はピタゴラスより前に既に知られていたようですが，この定理の一般的な証明を最初に与えた（あるいは記録した？）のがピタゴラスだったようです．ということは逆に言うとこの定理は，今から 2500 年くらい前に既に厳密に証明されていた，ということになります．このことは，それ自身，驚くべきこと，と言わなければなりませんが，「でも，このピタゴラスの定理と無限とは，いったいどんな関係があるっていうんだ！？」，とますます怪訝（けげん）に思う人もいるかもしれません．しかし，

> **どんな**直角三角形に対しても，その直角をはさむ二辺のそれぞれの長さの 2 乗の和は他の辺の長さの 2 乗に等しい．

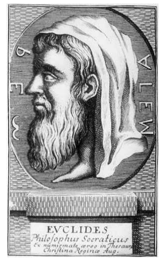
というふうに読みなおしてみるとわかると思いますが，この定理は，ひとつひとつの直角三角形ではなく，無限にある色々な直角三角形すべて：



で成り立つ性質について述べているのです．たとえば辺の長さの比が $3:4:5$ の直角三角形について 「$3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$ だから確かにピタゴラスの定理が成り立っている」と確認してみても，これは，このような 1 つの直角三角形について定理が成り立つことを確認しただけなので，ピタゴラスの定理の証明とは言えないわけです．

ピタゴラスの定理の証明は現在では 200 以上知られているようですが，それらはすべて，無限にある様々な直角三角形のどれに対しても適用できる論法によって議論することで，直角三角形の全体の個数としての無限を回避しているのです．

初等数学に現われる無限のもう 1 つの例として，ユークリッドによる素数の存在定理について考察してみたいと思います．



ユークリッド (Euclid)

ユークリッドは紀元前 325 年ごろに生まれ紀元前 265 年ごろに現在のエジプトのアレクサンドリアで亡くなった古代ギリシャの数学者です．ユークリッドは「幾何学原論」の著者として知られているため，幾何学だけを研究した人と思われがちですが，ユークリッドの（編纂した）「原論」には，実は幾何学だけでなく数論など当時の数学が，現代から見ても，（多少の不備はみとめられるものの）数学的に十分に厳密と言えるようなやりかたで体系化されています．ユークリッドについてはあまり多くのことがわかっておらず，実は実存した人物ではなかったとする説すらあるようですが，それはともかく，次は，このユクリッドの「原論」に含まれている定理の 1 つです．

自然数（1, 2, 3, . . . ）のうち，1 と自分自身以外では割切れないものは素数とよばれます．2, 3, 5, 7, 11 などは素数ですが，4 は 2 で割切れるし，9 も 3 で割切れるので素数ではありません．

定理 2 素数は無限に存在する．

前の定理とは異なり，この定理は直接 “無限” について言及しています．この定理は 2 は素数である，3 は素数である，. . . と数え上げてゆくやりかたでは証明できません．そのようにして証明するには，素数を無限に見つけてゆかなくてはならないわけですが，それには無限の時間が必要になるわけで，もちろんそんなことは不可能です．ある数が与えられたときにその数が素数かどうかは，その数より小さな数で 1 より大きいものについて，そのひとつひとつで割ってみて，それらのどの数でも割切れないかどうかをチェックすればわかるわけですが，一つ一つの数が素数であるかどうかチェックする方法があることと，そのような数が無限に存在するかどうかということには，直接の関係がなさそうに見えます．

定理 2 の証明には，背理法とよばれる証明方法が用いられます．背理法というのは，証明したい命題の否定が成り立つとして議論をして，その結果，矛盾する事実が成り立ってしまうことを示す，という論証です．「矛盾する事実が成り立ってしまうことが示せてしまったのは，証明したい命題の否定が成り立つという仮定に

原因があるのだから，この仮定は正しくない，つまり証明したい命題が成り立つ」ということから，このような議論により証明が完了するわけです．背理法による証明は数学の議論では非常に頻繁に用いられるので，専門家むけの本や論文では，「... でないと仮定すると，... であるから矛盾である．証明終り．」というような不親切な書き方になっていることも多いくらいです．では定理 2 の証明を見てみましょう：

定理 2 の証明: もし定理 2 が成立たないとすると，素数は有限個しか存在しないから，それらを $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とする．ここで，$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ \cdots \ \cdot p_n \ + \ 1$ という数を考える．q は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても 1 があまる．つまり $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても割切れない．したがって，q 自身が素数であるか，あるいは，$p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれとも異なる素数で割切れるが，いずれの場合も $p_1, p_2, \ldots, p_n$ が素数のすべてであるという仮定に矛盾する．この矛盾は，定理 2 が成立たない，つまり素数が有限個しか存在しないと仮定したことに起因するのであるから，この仮定は正しくなく，したがって，素数は無限に存在する．　（証明終り）

上の証明は，背理法で証明する，ということと，$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ \cdots \ \cdot p_n \ + \ 1$ を考える，という仕掛けさえわかってしまえば非常に単純なものです．こんなに簡単な証明で素数という神秘的な性質を持つ数の個数の無限性が示せてしまう，というのは驚くべきことだと思いませんか？

もちろん，どんな数学の命題も簡単に証明できてしまう，というわけではありません．たとえば，「$a^n = b^n + c^n$ を満たすような自然数 a, b, c がとれるのは n が 1 か 2 のときに限る」，ということを主張するフェルマーの定理は良い例でしょう．この定理は，17 世紀の数学者フェルマーが予想し，以来部分的な解は色々と見つかってはいたものの，ここに書いた一般的な形では，つい最近まで，誰も証明することができませんでした．ちなみに，n が 1 のときには，このような a, b, c がとれることは，任意の b と c に対し $a = b + c$ とすればよいことから明かです．また，n を 2 としたのときの $a^2 = b^2 + c^2$ はピタゴラスの定理で出てきた式と同じもので，たとえば上でも触れた $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$ がこの式を満たしています．

フェルマー定理が証明されたのは，1993 年，イギリスの数学者ワイルズによってでしたが，証明は，上の素数の存在定理とは違って，最新の数学の理論を駆使する非常に複雑で長大なもので，私をはじめ，数論を専門としない数学者の多くは，その証明をちゃんと理解していません．

「でもそんなことはコンピュータで確かめてみたらいいんじゃないの？」と言う人もいるかもしれません．しかし，コンピュータで確かめられるのは，有限個の場合だけです．たとえば，1000000000 までの数の組合せで $a^3 = b^3 + c^3$ を満たすも

のが 1 つもないことをコンピュータでしらみつぶしに計算して確かめたとしても，このことは，10000000000（ゼロが 1 つ多い）までの数の組合せでこの式を満たすものが 1 つもないことの保証にはなりませんよね．ちなみに $n = 3$ などの比較的小さな $n > 2$ を固定したときに $a^n = b^n + c^n$ を満たすような整数 a, b, c の組合せが存在しないことは，比較的簡単な議論で証明することができます — これについては，たとえば [1] に詳しい解説があります．

このように，数や平面上の点など数学の対象が無限に存在することから，数学は必然的に無限の呪縛から完全に自由になれないし，逆にそれにもかかわらず，数々の美しい結果を生み出しているとも言えます．あるいは，数学の根底にこのような無限がひそんでいるからこそ，数学の結果が独特の美しさを放っているのだ，と言うことができるかもしれません．

一方，無限についての数学的考察を進めると，直観と一致しない奇妙な結果が色々出てくることも次第にわかってきました．

そのような例として，部分と全体の大きさの比較，ということについて考えてみたいと思います．今 A と B が 2 つとも数学的対象物の集まりだとします（このようなものを数学の言葉では**集合**と言います）．たとえば，A は数，1, 2, 3, 4, 5 を集めたものとして，B は 2, 4, 6, 8, 10 を集めたものとしてみます．集合の用語では，この状況を，

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \qquad B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

とあらわします．この例では，A と B は同じ個数の要素を持っていますが，そのことは，たとえば，

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{array}$$

のように，A の要素の全体と B の要素の全体の間に一対一の対応，がつくことで確認できます．では，A に対して B を A の要素の一部分を集めたもの，としたときにはどうなるでしょうか？ たとえば，A を上の例と同じように，$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ として，$B = \{1, 2, 3\}$ としてみると，

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\ 1 & 2 & 3 & & \end{array}$$

というように，B の要素を A の要素と一対一にどう対応付けようとしても A の要素は余ってしまいます．これは，「B の要素の個数の方が A の要素の個数より真に小さい」ということを示している，と考えることができます．「あたりまえじゃないか」と言う人もいるかもしれません．でも次の例はどうでしょうか？

数学的対象の集まりを「集合」と言う，といいましたが，皆さんを専門用語で不必要に怖がらせてはいけないと思って，ここまでは，とりあえずこの単語を意識的に避けてみました．でも，「集合」という言い方をしないとやはりとてもまどろこしいので，以下では，この言い方を積極的に使うことにします．たとえば：

自然数を全部集めてできる集合は通常 $\mathbb{N}$ と表されます．

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

です．自然数と言ったときには，0 を含める流儀もあって，数学や計算機科学では（少なくともインターナショナルには）そちらの方が普通だと思います．このやり方だと，$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ となりますが，ここでは多分学習指導要領で指定されていて，皆さんが学校で習っている 0 を自然数に含めない $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ の方式でやることにします．

さて，ここで，E を偶数の全体からなる集合とします．つまり，

$$E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

です．E は $\mathbb{N}$ から奇数 1, 3, 5, 7, ... を除いて得られるので，$\mathbb{N}$ の一部分でしかありません．ところが，対応：

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & \cdots \end{array}$$

を考えると，これは，自然数の全体 $\mathbb{N}$ の要素のすべてと，偶数の全体 E の要素のすべての間の一対一対応となっていることが分ります．つまり，前でと同じ言い方をすると，E は $\mathbb{N}$ の一部分であるにもかかわらず，E の要素の数は $\mathbb{N}$ の要素の数と同じである，ということになってしまうわけです．

上の例では，偶数の全体 E の全体は，$\mathbb{N}$ からひとつおきに要素をひろってきてできた集合だったわけですが，S を平方数（n^2 の形にあらわせる数）の全体

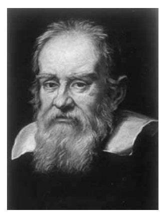
$$S = \{n^2 \mid n \text{ は自然数}\} = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots\}$$

とすると，S の要素は小さい方から $1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25, \ldots$ とどんどん間隔が大きくなってゆくにもかかわらず，やはり，

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 & \cdots \end{array}$$

と自然数の全体の集合の要素と一対一に対応がついてしまいます．

地動説で有名なガリレオ (Galileo Galilei, 1564 – 1642) は，彼の 1638 年の論文で上のような「逆理」をとりあげて，このことから『無限の大きさを比較する議論は無意味だ』と結論しています．



ガリレオ

2　数学の本質はその自由にある

しかし 19 世紀になると，無限の考察をより積極的に取りこんだ数学の必然性や可能性が強く感じられるようになってきました．ドイツの数学者ゲオルグ・カントル (Georg Cantor, 1845 年サンクト・ペテルブルク生 — 1918 年ハレ（旧東ドイツ）没) は，関数の無限級数であるフーリエ級数の収束条件に関する研究を契機として，無限について考察を深め，現在では「集合論」[*3]と呼ばれている，無限を研究する研究分野を確立するに至りました．上のガリレオの逆理に関しては，カントルは，全体と部分が同じ大きさになりえる，というまさにそのことが，無限の本質的な性質の 1 つである，と読みかえて，さらに先に進んでいったのです．

カントル

[*3] カントルによるドイツ語の命名は „Mengenlehre“ 英語では set theory.

集合論は当時の数学者すべてにすぐに受け入れられたわけではなく，特にカントルの先生だったクローネカ (Leopold Kronecker 1823 – 1891) は，最後まで数学の研究分野として受け入れず，拒絶的な批判をし続けました．カントルは当時の数学研究の中心地の一つで，彼自身も学生時代に学んだベルリン大学（現在のフンボルト大学）に帰りたいという強い希望を持っていましたが，クローネカがベルリンに君臨していたこともあって，ついに田舎の大学街であったハレの大学の教授として一生を終えることになったのです．

クローネカ

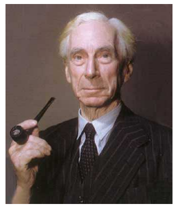
カントルは無限の研究を擁護して，1883 年に発表された論文の中で，

> ... これに対し，必要以上の研究領域の制限はより大きな危険をはらんでいるように思える．特に，学問の本質から，そのような制限に対して何の正当性も結論できないのであるからなおさらである； つまり，数学の本質はその自由にあるからである．

と言っています（下線は筆者による）[*4]．

無限集合では部分が全体と同じ大きさになりえる，という一見パラドクシカル（逆説的）な状況を，イギリスの哲学者で，若いころには数学の基礎の研究をしたバートランド・ラッセル (Bertrand Russell 1872 年ウェールズ（イギリス）生 – 1970 年ウェールズ没) は，「ヒルベルト・ホテル」の名前で知られている，次のような例え話に置き換えています（ただし以下に書いた話の細部は筆者の創作です．悪しからず）．

[*4] 原文では：„Dagegen scheint mir aber jede überflussige Einengung des mathematischen Forschungstriebes eine viel grossere Gefahr mit sich zu bringen und eine um so grossere, als dafür aus dem Wesen der Wissenschaft wirklich keinerlei Rechtfertigung gezogen werden kann; denn das Wesen der Mathematik liegt grerade in ihrer Freiheit.“— G.Cantor, Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, Mathematische Annalen, 21, (1883).



ラッセル

ヒルベルト

ヒルベルト・ホテルは 1 号室，2 号室，3 号室 $\cdots$ と無限に客室を持つホテルだった．ある晩遅く，その晩はちょうどこのホテルが満員になっていたのだったが，一人の男がホテルのフロントに現われて，どうしても一晩ここに泊めてもらいたいと頼んだ．あまりにひつこく頼まれるので，フロント係がホテルの支配人を呼んでくると，支配人はしばらく考えた後，「いいでしょう，あなたが今晩私どものホテルで泊れるように手配しましょう」と言って館内放送のマイクのスイッチを入れた．「お泊りのお客様にご案内します．事情により，お客様方の部屋換をお願いしたく思います．1 号室のお客様は 2 号室に移ってください．2 号室のお客様は 3 号室に移ってください．3 号室のお客様は 4 号室に移ってください．同じように， n 号室のお客様は $n+1$ 号室に移ってください．ご協力をお願いいたします．」 すべての客が協力的に部屋を移動してくれたおかげで 1 号室が空室になったので，支配人はこの客をホテルに泊めることができたのだった．

　ところがこの晩はよほど普通とは違っていた．またしばらくすると，今度は無限人の団体客を乗せた観光バスがヒルベルト・ホテルの前にとまったのだ．団体旅行のガイドがフロントに来て，「今晩は A 湖湖畔のホテルで宿泊予定だったのですが，吹雪で峠が封鎖されてしまい行けなくなってしまいました．今晩ここに泊めていただけないでしょうか？」と懇願したのだった．そこでフロント係があわててホテルの支配人をよぶと，「分りました．何とかしましょう」と言って，支配人はふたたび館内放送のマイクに向って： 「誠に申し訳ございませんが，もう一度部屋の移動をお願いします．今度は今 1 号室にいらっしゃるお客様は 2 号室へ，2 号室のお客様は 4 号室へ，3 号室のお客様は 6 号室へ，同じように，n 号室のお客様は $2n$ 号室へ移動してください．」 すると，奇数番の 1 号室，3 号室，5 号室 $\cdots$ が全部空室になったので，無限人の旅行客は無事にこれらの無限個の部屋に泊ることができたのだった．

この話で出てきたヒルベルトというのは，20 世紀初頭最大の数学者としてフランスのアンリ・ポワンカレ (Jule Henri Poincaré 1854 年ナンシー生 — 1912 年パリ没) と並び称されたドイツの数学者ダーフィット・ヒルベルト (David Hilbert 1862

年クーニクスベルク（現在のロシア）生 — 1943 年ゲッチンゲン（ドイツ）没) のもじりです．ヒルベルトは集合論の研究の重要性を確信して，「無限について」と題する 1926 年の論文の最後を，聖書の創世記の楽園追放を引用して，「カントルの創造した楽園から何人（なんびと）も我々を追放することはできない」[*5]という有名な言葉でむすんでいます．

ちなみに，ヒルベルトが集合論擁護派の数学者だったのに対しポワンカレは集合論に対し，懐疑的な立場をとっており，彼の残した言葉には，「Mengenlehre（集合論）は後の世代の人々にとっては，一度かかったがもう治ってしまった病気のようなものと見えるようになるだろう」というものがあるそうです[*6]．

ポワンカレ

集合論の研究は 20 世紀後半以降に劇的に深化したので，集合論をめぐる状況は，ヒルベルトやポアンカレの上記の発言がなされた 20 世紀の初頭の状況とは全く異なるものになっていると言わなければならないはずなのですが，日本では数学を勉強する学生が現代的な集合論を全く習わない，ということもあり，かなりの数の数学者が，集合論はポアンカレの言ったような意味で「もう治ってしまった病気」になっていると思いこんでいる節があります．集合論はこれらの数学者の考えているように「病気」と言えないこともないのかもしれませんが，もし「病気」という言い方をするなら，その病状は，現在，20 世紀の初頭とは比較できないほど複雑怪奇なものに悪化している，と言わざるを得ず，とても「治ってしまった」と言ってすましていられるはずはないのですが ...

[*5]原文は，„Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.“, D.Hilbert, Über das Unendliche, Math. Ann. 95 (1926), 161–190.

[*6]ただしこれは出典が不明で，寺田寅彦の「天災は忘れたころにやってくる」と同じように，ポアンカレがこれを本当に言ったかどうかは確証がないようですが．

3　可算と非可算

ちょっと話が脇へそれてしまいました．無限集合の大きさを比較する話をもう少し続けてみようと思います．上の「ヒルベルト・ホテル」の話でわかるように，集合 X, Y について，両方とも自然数の全体 $\mathbb{N}$ と一対一に対応がつくなら，この 2 つの集合の要素を全部合わせた集合（このようなものは $X \cup Y$ と表して，X と Y の和集合とよびます）も $\mathbb{N}$ と一対一に対応がつくことがわかります．

整数の全体の集合 $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ は正の整数の全体（つまり $\mathbb{N}$）と 0 より小さいか等しい整数の全体 $\{\ldots -2, -1, 0\}$ に分けられるので，上で言ったことにより，$\mathbb{Z}$ も $\mathbb{N}$ と一対一に対応がつくことがわかります．

次に，自然数の組を集めてできる集合 $\mathbb{N}^2$ を考えてみます．つまり

$$\mathbb{N}^2 = \{(m, n) : m, n \text{ は自然数}\}$$

です．今 (m, n) と (m', n') を $\mathbb{N}^2$ からとるとき，$(m, n) \prec (m', n')$ を，

> m と n の大きいほうが m' と n' の大きい方より真に小さいか，これらが同じで，$m < m'$ または，$m = m'$ かつ $n < n'$ が成り立つ

ということとすると，$\prec$ は $\mathbb{N}^2$ 上の順序になりますが，この順序で，1 番目，2 番目，3 番目，... と $\mathbb{N}^2$ の要素をならべて，この中の n 番目の組を n に対応させることで，$\mathbb{N}$ の要素全体から $\mathbb{N}^2$ の要素全体への一対一対応がとれることがわかります．これと前のパラグラフで考えたことを合わせると，たとえば，$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(\ell, m) : \ell \text{ は整数で } m \text{ は自然数}\}$ も $\mathbb{N}$ と一対一に対応がつくことが結論できます．

次に有理数の全体，つまり分数で表せる数の全体 $\mathbb{Q}$ を考えてみましょう．$\mathbb{Q}$ の要素の既約表現 ℓ/m （ただし，ℓ, m は整数で，$m > 0$ とする．つまり m は自然数）に，$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ の要素 (ℓ, m) を対応させることで，$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ の部分と一対一対応がつくことがわります．一方，$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ は $\mathbb{N}$ と一対一対応がつくので，これらの事実を組み合せると，$\mathbb{Q}$ も $\mathbb{N}$ と一対一に対応がついてしまうことがわかります．これは，よく考えてみると奇妙なことです： 数直線上で考えてみると，$\mathbb{N}$ の要素はとびとびにしかないのに対して $\mathbb{Q}$ の要素は，数直線の上にぎっしりとつまっています．そう考えると $\mathbb{Q}$ の無限の度合の方が $\mathbb{N}$ の無限の度合より大きそうに見えるのですが，実はそうでなくて，$\mathbb{N}$ と $\mathbb{Q}$ は同じ大きさを持っていることが結論されたのですから．

このように見てゆくと，実はすべての無限集合は自然数の全体と一対一に対応づけできるのではないか？ つまり，すべての無限集合は自然数の全体の集合と同

じ濃度を持つのではないか？ と予想したくなりますが，実はこれは正しくなくて，自然数の全体の無限より真に大きな無限がごく身近に存在することが知られています．次の定理はカントルによって 1873 年の 12 月 7 日に証明されています[*7]．数学史の研究者の中には，この日を，この定理によって集合論が数学理論として確立された日である（その時歴史は動いた！），と考える人もあります．

定理 3 (G. Cantor, 1873) 自然数の全体を一対一に実数の全体ともれなく対応させることはできない．つまり，実数の全体 $\mathbb{R}$ は $\mathbb{N}$ より “真に大きな” 集合である．

現代の用語では，無限集合 A の大きさのことを A の濃度と言います．この言い方を使うと，「この定理は，$\mathbb{R}$ の濃度は $\mathbb{N}$ の濃度より真に大きい」と言うことができます．

上のカントルの定理は背理法を使うとおどろくほど簡単に証明できます．証明で必要になる数学的な知識も，どんな実数も無限小数として表せて，そのような無限小数表現は，$1.000\cdots$ と $0.999\cdots$ が同じになるなどの特殊な場合をのぞくと，一意に決まる，ということのみです[*8]：

定理 3 の証明： もし定理が成立たないとすると，$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ の要素すべてへの一対一対応がとれる．つまり，実数の全部を $r_1, r_2, r_3, \ldots$ とならべることができる．このような実数の列 $r_1, r_2, r_3, \ldots$ を各々の実数を無限小数であらわして，たとえば，

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 2.41610738255033356\cdots \\
r_2 &= -562.4328358208955225\cdots \\
r_3 &= 1.9462686567164178\cdots \\
r_4 &= 0.00117822429 \\
r_5 &= -1.5490001 \\
&\vdots \qquad \vdots
\end{aligned}
$$

というふうに（無限の）リストとしてならべておく．ここで，このリストの小数点

[*7] この日が特定できるのは，この日付のカントルのデテキントに宛ての手紙で，「今日になって分かった」として，まだ不必要な要素も含んではいるけれども本質的には正しい証明を書き出したものが残っているからです．

[*8] 無限小数と言っても，たとえば 200 や 3.25 のように小数点以下有限桁で表示が終ってしまう場合もありますが，このときには，$200.0000000000\cdots$ や，$3.25000000000\cdots$ というように，終ってしまった表示の後には無限個の 0 が省略されている，と考えることにします．

以下の “対角線上” に並んだ数字に着目する．

$$\begin{array}{rr} r_1 = & 2.\boxed{4}161073825503356\cdots \\ r_2 = & -562.4\boxed{3}28358208955225\cdots \\ r_3 = & 1.94\boxed{6}2686567164178\cdots \\ r_4 = & 0.001\boxed{1}7822429 \\ r_5 = & -1.5490\boxed{0}01 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

ここで対角線に並んだ数字の無限列: $\boxed{4}\boxed{3}\boxed{6}\boxed{1}\boxed{0}\cdots$ の n 番目の数字と異なる数字 n 番目の数字とするような無限列を “0.” という記号の後に並べて実数の無限小数表示を作る．たとえば n 番目の数字と異なる数字のうち最小のものを選んでゆくことにすると，$0.00001\cdots$ というような無限小数表示が得られることになるが，この無限小数表示で表される数を r とすると，r は，$r_1, r_2, r_3, \ldots$ のどれとも異なるものになることがわかる： たとえば r の無限小数表示の小数点以下 1 桁にある数字は r_1 のそれとは異なるように選んだので，$r \neq r_1$ だし，r の無限小数表示の小数点以下 2 桁にある数字は r_2 のそれとは異なるように選んだので，$r \neq r_2$, 等々．つまり，r は $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ に含まれない．ところが，$r_1, r_2, r_3, \ldots$ は実数のすべてを網羅するように選んでいたので，これは矛盾である．したがって，ここで仮定したような実数の列 $r_1, r_2, r_3, \ldots$ はとれないことがわかり，このことから定理の主張が示された． （証明終り）

上の証明で用いられた “対角線上” に値をとってゆく，というアイデアは，今日では「カントルの対角線論法[*9]」と呼ばれていて，集合論や数理論理学での重要な手法の一つとなっています．ちなみに，上で述べた証明法は 1873 年より後にカントルが発見したもので，1873 年の証明は区間の列を考えるという見かけ上は別の方法によるものだったようです．

定理 3 により，$\mathbb{N}$ より本質的に大きい集合があることがわかったのですが，このような集合は**非可算**である，とか**不可算**である，と言われています．これに対し，要素のすべてが $\mathbb{N}$ の要素と一対一に対応づけられる無限集合は**可算**な集合であると言います．ちょっとまぎらわしいのですが，X が可算集合であると言ったときには，可算な無限集合であるか，あるいは有限集合であるかどちらかである，ということにします．

[*9] ドイツ語では „Cantorsches Diagonalverfahren“.

$\mathbb{N}$ 自身や $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ は可算ですが，$\mathbb{R}$ は非可算です．非可算な集合のうち要素の全体が実数の全体と一対一に対応がつくものは**連続体濃度**を持つといいます．連続体濃度を持つ集合は可算集合に比べてずっと“大きい”ので，連続体濃度を持つ集合から可算集合をとりさった残りや，連続体濃度を持つ集合に可算集合を加えて得られる集合も依然として連続体濃度を持っています．このことは実はもう少し一般的にたとえば次のような形で証明できます[*10]．

補題 4 (1) X を無限集合として，Y を可算集合とするとき，X と Y の要素を全部集めてできる集合[*11]は X と同じ濃度を持つ．

(2) X を非可算集合として，Y を可算集合とするとき，X から Y の要素になっているものを除いて得られる集合[*12]は，X と同じ濃度を持つ．

証明． 脚注で述べた記法を用いて，X と Y の要素を全部集めてできる集合を $X \cup Y$ で表し，X から Y の要素を除いて得られる集合を $X \setminus Y$ と書くことにする．

(1): まず，X と Y は共通の要素を持たないとしてもよいことに注意する．もし共通の要素があれば，それらをすべて Y から取りさった残りを改めて Y としても，$X \cup Y$ は変らないからである．

以下 Y が無限の場合を考える．Y が有限の場合も同様のアイデアで証明できる．

Y は可算だから，Y の要素は，$y_1, y_2, y_3, \ldots$ と（重複なしに）並べつくすことができる．一方 X は無限集合だから，X の要素の一部を（重複なしに）$x_1, x_2, x_3, \ldots$ と並べることができる．X の要素 x に対し $X \cup Y$ の要素 $f(x)$ を次のようにとる：

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ が } x_1, x_2, x_3, \ldots \text{ のどれとも等しくないとき} \\ x_n & \text{ある自然数 } n \text{ により } x = x_{2n} \text{ と表せるとき} \\ y_n & \text{ある自然数 } n \text{ により } x = x_{2n-1} \text{ と表せるとき} \end{cases}$$

このとき，対応 $x \mapsto f(x)$ は X のすべての要素を $X \cup Y$ のすべての要素に一対一に対応させるから，X と $X \cup Y$ は濃度が等しいことがわかる．

(2): Y の要素はすべて X の要素であると考えてかまわない．Y の要素で X の要素でもあるようなものを集た集合で Y を置き換えても $X \setminus Y$ は変らないからで

[*10] ここで述べているのは，数学的な準備なしでできる一般化にすぎません．より一般的な議論をするためには，超限帰納法と呼ばれる手法の準備が必要になります．これについては，たとえば [4] を参照してください．

[*11] このような集合は X と Y の和集合と呼ばれ，$X \cup Y$ と表されます．

[*12] このような集合は X と Y の差集合と呼ばれ，$X \setminus Y$ と表されます．

ある．ここでも Y が無限の場合のみ考えることにする．Y は可算だから，Y の要素は，$y_1, y_2, y_3, \ldots$ と（重複なしに）並べつくすことができる．

一方 X は非可算なので，$X = (X \setminus Y) \cup Y$ により，ヒルベルト・ホテルの話でのように，もし $X \setminus Y$ が可算なら X も可算になってしまうから，$X \setminus Y$ は非可算である．特に，$X \setminus Y$ は無限集合だから，これの要素を $x_1, x_2, x_3, \ldots$ と重複のないように選ぶことができる．今，X の要素 x に対し $X \setminus Y$ の要素 $f(x)$ を次のようにとる：

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ が } x_1, x_2, x_3, \ldots\ y_1, y_2, y_3, \ldots \text{ のどれとも等しくないとき} \\ x_{2n} & \text{ある自然数 } n \text{ により } x = x_n \text{ と表せるとき} \\ x_{2n-1} & \text{ある自然数 } n \text{ により } x = y_n \text{ と表せるとき} \end{cases}$$

このとき，対応 $x \mapsto f(x)$ は X のすべての要素を $X \setminus Y$ のすべての要素に一対一に対応させるから，X と $X \setminus Y$ は濃度が等しいことがわかる．　　（証明終り）

有理数の全体 $\mathbb{Q}$ が可算であることを既に見ましたが，このとこと，定理 3 と 補題 4,(2) から：

系 5 有理数でないような実数（つまり無理数）は連続体濃度個存在する．

たとえば，$\sqrt{2}$ は有理数でない実数の例ですが[*13]，上の系により，$\sqrt{2}$ は決して例外的な存在ではなくて，このような数は実数の中の非常に多くのものであることがわかります．

整数係数の多項式の根となっているような数のことを**代数的数**とよび，そうでないような数のことを**超越数**とよびます．有理数 $\dfrac{m}{n}$ は一次多項式 $nX - m$ の根（つまり方程式 $nX - m = 0$ の解）なので代数的数です．これを別の言い方で言うと，超越数はすべて無理数です．このことの逆は一般には成立ちません：$\sqrt{2}$ は有理数でないことはすでに触れましたが，$\sqrt{2}$ は多項式 $X^2 - 2$ の根なので代数的数です．

1882 年にヒルベルトの先生だったリンデマン (Ferdinand von Lindeman 1852 – 1939) は円周率 π が超越数であることを証明しています．一方 2003 年からの日本の算数教育では円周率を「３」とすることが事実上命令されているようです．

整数係数の多項式は可算個しかないことが $\mathbb{Q}$ が可算個の要素しかもたないことの証明と同じようにして示せるので，これと一つ一つの多項式の根（多項式 $= 0$ という等式を満たす数）は有限個しかないという事実をあわせると，整数係数の多

[*13] この事実はピタゴラスの時代にすでに証明されていました．

項式の根となっているような数は可算個しか存在しないことがわかります．このこととカントルの実数の非可算性の定理を使うと，系 5 と同様に，

系 6 超越数は連続体濃度個存在する．

$\mathbb{R}$ の有限区間も連続体濃度を持っています．$0 < x < 1$ となる実数 x に対して

$$f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$$

とすると，この f は 0 から 1 までの開区間 $(0,1)$ のすべての点 — つまり $0 < x < 1$ となる実数のすべてを $\mathbb{R}$ のすべての点に一対一に対応させます．このことから，$(0,1)$ は連続体濃度を持つことがわかります．0 から 1 までの閉区間 $[0,1]$, つまり $0 \leq x \leq 1$ となる実数の全体の集合は $(0,1)$ に 0 と 1 を要素として加えた集合なので，$(0,1)$ が連続体濃度であることと，補題 4,(1) から，やはり連続体濃度であることがわかります．

このような考察を，たとえば，確率に関する議論で応用すると，つぎのようなことが言えることがわかります．今，両端で区切られた直線上に針を落す実験を考えます．この直線を実数の区間 $(0,1)$ で座標付けすることにします．また，針はこの直線上のどのあたりにも等確率で落ちるとします．このとき，針の落ちた場所の座標が有理数になる確率は何になるでしょうか？ 結論を先に言ってしまえば，この確率は 0 になることが，次のようにして示せます[*14]：背理法で証明します．針の落ちた場所の座標が有理数になる確率が $r > 0$ だったとして，矛盾を導きます．自然数 n を $nr > 2$ となるようなものとします．このとき， $0 < t_1, t_2, \ldots, t_n < \frac{r}{2}$ で，各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し， S_i を

ある有理数 q に対し $q + t_i$ と表せるような $(0,1)$ に含まれる実数の全体

とするとき[*15]，

$(*)$ 異なる i, j に対し S_i, S_j が共通部分を持たない

ようにとることができます．実は，このような $0 < t_1, t_2, \ldots, t_n < \frac{r}{2}$ がとれることを示すために，実数直線上の区間が非可算だという上で示した事実が必要になりま

[*14]実数の集合論の用語を用いると，ここで示しているのは，“μ を $[0,1]$ 上の Borel 集合で定義された translation invariant な有限加法的確率測度として I を μ に関する零集合から生成されるイデアルとするとき，$non(I) \geq \aleph_1$ が成り立つ” という事実です．

[*15]集合の記号を使うと， $S_i = \{q + t_i : q \in \mathbb{Q}, 0 < q + t_i < 1\}$ です．

す．今，$0 \leq i < n$ として，$t_1,\ldots, t_i$ まで性質 $(*)$ が成り立つようにうまくとれたとします．このとき，$S_1 \cup \cdots \cup S_i$ は 補題 4 ,(1) により可算で，$(0, \frac{r}{n})$ は非可算なので，$0 < t_{i+1} < \frac{r}{n}$ で $S_1 \cup \cdots \cup S_i$ に属さないものがとれます．このとき，どんな有理数 q とをっても $q + t_{i+1}$ も $S_1 \cup \cdots \cup S_i$ に属さないことがするにわかるので，このような t_{i+1} をとれば，$t_1, \ldots, t_i$ にこの t_{i+1} を加えたものも上の性質 $(*)$ が成り立ちます．このようにして，$0 < t_1, t_2, \cdots < \frac{r}{2}$ を $(*)$ が成り立つように順にとってゆくことができることが示せたわけです．

さて，S_i は $(0,1)$ に含まれる有理数の全体を t_i だけずらして $(0,1)$ からはみ出した部分を取り除いたもので，$0 < t_i < \frac{r}{2}$ ですから，針の落ちた場所が S_i に含まれる確率は少なくとも $r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$ あることがわかります．ところが $S_i, i = 1, 2, \ldots, n$ は互いに共通部分を持たないので，針の落ちた場所が $S_1, S_2,\ldots, S_n$ のどれかに含まれている確率は，$n \times \frac{r}{2} > 1$ となります．確率が 1 より大きいことはありえないので，これは矛盾です．この矛盾は，「針の落ちた場所の座標が有理数になる確率が $r > 0$ である」と仮定したことから導かれたので，この仮定が間違っている，つまり 「針の落ちた場所の座標が有理数になる確率は 0 である」ことが証明できたことになります．

もちろん上のような “実験” は物理的にはナンセンスです．針が落ちた場所の座標の値は現実的には有限桁しか測定できないので，この座標が有理数かどうかを問うことは意味を持たないからです．しかし，数学の体系（ここでの例では確率の理論の体系）を厳密に構築しようとするときには，物理的な解釈が意味をなさないからと言って，そのような細部をおざなりにするわけにはいきません．そのため，上のような考察も全く無意味とは言いきれないし，むしろ避けて通れないものなのです．

4　無限の彼方へ

前の節で書いたことは，ほとんどすべてカントル自身の研究によって明かにされた事実で，したがって，20 世紀の初頭にはすでに知られていた結果ですが，集合論の研究はカントルの仕事で完結してしまったわけではなくて，その後，20 世紀を通じて，さらに大きく発展してきています．特に，20 世紀末からの研究の動きは，これまでの成果の大きな統合を予感させる，大変にダイナミックなものなってきていると言えます．現代の研究の前線に関して具体的に説明するには色々と技術的な準備が必要となるため，ここではそれをやるだけの余裕はありませんが，カントル

の遺した，未来への課題である連続体仮説について，など多少補足しておきたいと思います．また，ここで話したことより先を勉強してみたい人のために参考文献についても触れておきたいと思います．

連続体仮説は，カントル以降，集合論の発展をうながし，その理論の成熟に対する試金石のような役目をはたしてきた問題と言うことができるでしょう．これは，前述のフェルマーの定理が数論に対してはたした役割と比較できると思いますが，フェルマーの問題が完全に解かれてしまったのに対し，連続体仮説に関した問題はまだ最終的な解が得られていない可能性があるように見え，しかも現在その最終的な解が手のとどきそうなところにある，という触感があるということ，またフェルマーの定理自身は長い間未解決の問題だったという点を除くと，命題自身としてはごく平凡な定理であるのに対し[*16]，連続体仮説は，それ自身も数学の哲学的な認識とかかわる深い内容を持つものであるように思われる，というようにそれらの数学的な試金石としての役割にも微妙な違いがあります．

前出の定理 3 で，$\mathbb{R}$ の濃度（連続体濃度）は $\mathbb{N}$ の濃度（可算）より真に大きいことが示されたわけですが，それでは，$\mathbb{R}$ の濃度と $\mathbb{N}$ の濃度の間に，まだ別の無限集合の濃度が存在するのでしょうか？ カントルは数学で現われる自然な無限集合の濃度は，ほとんどの場合，可算か連続体濃度になることが直ちに示せることから，これらの濃度の間には別の無限の濃度が存在しないことを予想して，この予想を**連続体仮説**と呼んだのでした．

連続体仮説が正しいかどうかという問題に一応の回答が得られたのは，1960 年代になってからでしたが，その答は，「連続体仮説の集合論からの独立性」という従来の数学の問題の解決とは性格の異なるものでした．

連続体仮説が正しいことも正しくないことも従来の数学の体系の中で

[*16] [14.01.31 に加筆] ただし，フェルマーの定理が証明される直前には，この定理 (当時は「フェルマーの予想」) が志村-谷山予想と呼ばれる，もっと 本質的に重要な数論の予想と同値になることが示されていて，フェルマーの定理の証明が得られた，というのは，実は，この志村-谷山予想が肯定的に解かれたということでした．もちろん，証明された数学の定理は (数学の体系上で) すべて互いに同値になるわけですが，この場合，フェルマーの予想と志村-谷山予想の間には，これらの予想の結着より前に，数学的な関連が発見されていたわけです．このように，「何の役にたつのか分らない」研究が何十年や何百年という長い時間の後になってから，実は重要なものだった，ということがわかる，ということは，数学やもっと広く科学全般では少なくありません．だから何を研究してもいいと言っているわけではないのですが，日本で (あるいは残念ながら世界的にも) 数学的，あるいは科学的な実質がある研究を，「これは何の役にたつのか分らない」という一言で切り捨る風潮が，研究にお金を出す側にあることには，危機感を感じます．

は証明できない

というのがその答だったのです．つまり，「連続体仮説が正しいことも正しくないことも従来の数学の体系の中では証明できない」ということが証明されたのです．「証明できない」ことが証明された有名な例としては，次の平行線公理の独立性があります：

> 平行線の公理が正しいことも正しくないことも，平行線の公理以外の初等幾何の公理からは証明できない．

このことを示すためには，初等幾何のモデルで，平行線公理が成り立つものと成立たないものの両方が作れることを示せばよく，平行線公理独立性は，この方針によって，19 世紀末には証明されていました．しかし，連続体仮説の独立性は，基礎としているのが，従来の数学の体系，つまり，すべての数学を含む体系です．そのため，これのモデルを議論する立場はそもそも何なのか？ など，という問題も出てきて，証明は一筋縄ではいきそうにありません．

そもそも，「証明できない」ことをちゃんと証明するためには，「数学的な証明」ということが何なのかを数学的にはっきりさせる必要があります．しかし，これは，前にも何度か名前の出たヒルベルトが晩年に力を入れて研究した数学基礎論[*17]という研究分野での成果により 1930 年代にははっきりしとした定義が可能になっていました．

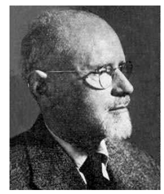
ゲーデル

ゲーデル (Kurt Gödel, 1906 年ブルノ（当時のオーストリア=ハンガリー）生– 1978 年プリンストン（アメリカ）没) の完全性定理によって，ヒルベルトの導入した体系（やその他のこれと同等な体系 — この体系は 1 階の論理と呼ばれます）の完全性が証明されたのが 1930 年ですが，同じころツェルメロ (Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, 1871 年ベルリン生 — 1953 年フライブルク没)，フレンケル (Abraham Halevi Fraenkel, 1891 年ミュンヘン生 — 1965 年エルサレム没)，フォン・ノイマン

[*17] ドイツ語の原語では „Grundlagen der Mathematik“（数学の基礎）

(John von Neumann, 1903 年ブタペスト生 — 1957 年ワシントン D.C. 没) らによる研究によって集合論が 1 階の論理で公理化されました．この体系で（ほとんど）すべての数学が展開できると考えられるので，この体系で形式的な証明が存在しないことが示せれば「従来の数学の体系の中で証明できない」ということが結論できるとみなしてよいことがわかります．

ツェルメロ



フレンケル

フォン・ノイマン

連続体仮説の独立性は 1938 年に発表されたゲーデルの仕事（従来の数学の体系の中で連続体仮説の否定は証明できない）と，1963 年のコーエン (Paul Cohen, 1934 –)（従来の数学の体系の中で連続体仮説は証明できない）によって得られています．ゲーデルとコーエンによる仕事で開発された手法（構成的集合の理論と強制法の理論）は，その後改良が重ねられ，これらの手法や，後で触れることになる巨大基数の理論などを用いて，連続体仮説以外にも数学的命題で従来の数学の体系の中ではその正否が決定できないことが証明できているものが多く見つかっています[*18]．

ゲーデルとコーエンの仕事で，連続体仮説に関する問題は一応は結着が着いたと言えるのですが，しかし，この結果で「従来の数学の体系の中で」とするところにまだ改善の余地が残っていそうなことが，最近の結果から見えてきているように思えます．これは，何らかの正当性が保証できるような，従来の数学の体系を拡張する体系の中で連続体仮説や他の独立性の知られている問題についての正否が決定できる，という可能性があるからで，そのような拡張の有力候補あるいは，有力候補を導出する可能性のある研究方向がいくつか見つかってきている，というのが，その理由です．この場合の「正当性の保証」というのはなかなか微妙で，単に個人的な好みや “哲学” でなく数学的な議論が可能なのかどうかは，最終的な結果が出

[*18] 蛇足ながら筆者の見つけたものもいくつかあります．

てみないと何とも言えない，という気もします．しかし，これは，この方向の研究が不可能である，ということを意味するものでもないでしょう．

定理3 で実数の全体 $\mathbb{R}$ は $\mathbb{N}$ より大きな濃度を持つことを示しましたが，実はそこでの議論を一般化することで，

> どんな無限集合に対しても，それより大きな濃度を持つ無限集合が存在する

ということが示せます．たとえば，$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数の全体は，$\mathbb{R}$ より大きな濃度を持つ集合です．ついでに言うと，可算個の点をのぞくすべての点で連続な関数は連続体濃度しかないことが簡単に示せるので，数の上からは，ほとんどの関数は，非可算個の点で不連続であることがわかります．

> 従来の数学で現われる，あるいは現われる可能性のあるどの無限集合の濃度も超越するような濃度を持つ集合が存在する

という命題を考えてみます．実際には，「超越する」を数学的にどう表現するかによって，このタイプの命題がいくつも作れるわけなのですが，このような命題は**巨大基数公理**とよばれています．このようなタイプの命題を数学の新しい公理として採用すると何が起るかを研究する，という研究分野は**巨大基数の集合論**と呼ばれて1940年代以降さかんに研究されています．ちなみに，巨大基数とは上の命題でその存在を保証した集合の濃度のことです．

カントルの「数学の本質はその自由にある」という立場は「存在する可能性のあるものは数学的存在として（つまり集合として）存在する」というふうにも解釈でき，そのような立場からは，様々な巨大基数は，それらが集合論と抵触しないかぎりにおいてすべて存在する，と考えるべきで，その意味では巨大基数公理は「正しい」公理と考られます．

そこで，従来の数学の体系にこれらの巨大基数公理を付け加えた体系を考え，そこで連続体仮説の正否を調べたらいいのではないか，ということが自然な方針として思いつきます．実際ゲーデルはこのような方針で連続体問題が解決できるのではないか，と考えていたようです．ところが，コーエンの強制法を用いると，巨大基数公理からは，連続体仮説の正否は決定できないことが証明できるので，このアイデアはそのままの形では用をなし得ません．しかし他方では，連続体仮説は決定しないものの，巨大基数の存在は，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数の全体の構造にかかわる多くの命題を決定することがわかってきています．

また，巨大基数の公理のもとでの内部モデルの理論やコーエンの強制法の様々な拡張が考案され，これらの手法を用いた研究から得られた結果から，連続体仮説の正否を決定するような様々な原理が案出されてきています．

このような状況から，集合論の研究はこの先 10 年以内にさらに進展して大きな統合をはたし，その結果として連続体問題を含む多くの問題に新しい光があてられるようになるだろう，という予想はあながち誇大妄想とは言いきれないように思えます．そして，このときに，私も現役の数学者として，そのような感動的な場面に立ちあえることを願っています[*19]．

最後に，ここでお話ししたことに関連する文献について触れておくことにします．集合論をじっくり勉強するための標準的な教科書としては，[11] や [9] があげられます．[11] は愛媛大学の藤田 博司氏が翻訳中のようですが[*20]，[11] や [9] のレベルの日本語の教科書は今のところ存在しないのではないかと思います．ただし，古典的な集合論を中心に述べた日本語の教科書で最近出版されたものには [13], [16] などがあり，これらよりもう少し本格的なものとしては，少し古い本ですが，[14] があります．

また [15] は，ここではとりあげなかった選択公理を中心にして集合論について述べたものとなっています．本稿の最後で触れた巨大基数の集合論については [10] が参考になるでしょう．これは初心者向きの本とは言えませんが，日系アメリカ人で集合論の第一線の研究者である著者の Kanamori 先生は数学史の研究でも大変すぐれた論文をいくつも書いておられ，この本にも集合論の歴史や哲学的解釈についての卓越した記述が（特に前書と後書で）見られます．

また，本稿の筆者が最近書いた集合論に関する解説記事には [2], [3], [4], [5],[6], [7], [8] などがあります．[2] は本稿の最後で触れた連続体仮説に関する話題がとりあげられていて，本稿では触れられなかった不完全性定理との関連についても触れています．また，[6] は，本稿や [2] よりは多少高いレベルの予備知識を想定していますが，forcing axioms と呼ばれる連続体仮説の否定を導く，ある意味で自然な公理群についての解説です．[3] と [4] は数学基礎論サマースクールで行なった講

[*19] これは私事ではありますが，現在，研究にとって決して最良とは言えない環境にあることや，これから思考能力や持続力の衰えと戦わなければならなくなることも考えると，これはかなり悲愴な決意と言えます．少なくとも普通の人間としての生活や幸福を放棄するという宣言をしているくらいのつもりではあります．

[*20] [14.01.31 に加筆] この訳本はその後，K. キューネン (著)， 藤田 博司 (訳)，集合論 — 独立性証明への案内，日本評論社 (2008) として出版されています．

義の講義録です．[7] と [8] は辞典の中の項目なので無記名ですが，コンパクトにまとめるために非常な苦労と時間をかけたものです．出来にはそれなりに自信もあるので，あえて挙げておくことにします．

なお, 本稿の数学史に関する記述の多くは School of Mathematical and Computational Sciences University of St Andrews の web page 上の数学史アーカイヴ [12] も参考にしました．

この小文がきっかけとなって無限の問題，数学的な無限の研究に興味を持っていただければ幸です．

参考文献

[1] 足立恒雄，フェルマーの大定理　整数論の源流 [第 3 版]，日本評論社 (1996).

[2] 渕野 昌，ヒルベルト 23 の問題・第 1 問題 — 連続体仮説, 数学セミナー，vol.37, no.5 (1998), 50–53 （20 世紀の予想，現代数学の軌跡，日本評論社編，日本評論社 (2000) に再録）.

[3] ___, 初等部分構造の手法とその集合論での応用,（1997 年度数学基礎論サマースクールにおける講義の講義録），集合論研究集会報告集，Eds.: 江田勝哉，阿部吉弘, Waseda University (1998), 19–30.

[4] ___, 実数の集合論の基礎の基礎, 実数の集合論 （2002 年度数学基礎論サマースクールにおける講義の講義録），Ed.: 松原洋，名古屋大学 (2003), 3–38.

[5] ___, 数学の基礎としての集合論 vs. 数学としての集合論， 日本数学会 2003 年秋季総合分科会，企画特別講演予稿集 (2003).

[6] ___, Forcing Axioms と連続体問題 — 公理的集合論の最近の話題から —, 数学 (Sugaku), Vol.56, No.3 (2004), 248–259.

[7] ___, 数学辞典 第 4 版，日本数学会編，岩波書店 (to appear) の「公理的集合論」の項目.

[8] ___, 数学辞典 第 4 版，日本数学会編，岩波書店 (to appear) の「強制法」の項目.

[9] T. Jech, Set-Theory, 3. millennium ed., revised and expanded, Springer, (2002).

[10] A. Kanamori, The Higer Infinite, Springer-Verlag (1994/97); 日本語訳：「巨大基数の集合論」, 渕野 昌 訳，シュプリンガー・フェアラーク東京 (1998).

[11] K. Kunen, Set Theory, North-Holland (1980).

[12] MacTutor History of Mathematics Archive,
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk./history.

[13] 田中一之，鈴木登志雄，数学のロジックと集合論，培風館 (2003).

[14] 公理的集合論, 培風館 (1982).

[15] 田中 尚夫，選択公理と数学 — 発生と論争，そして確立への道, 増補版，遊星社 (1987/1999).

[16] 上江洲忠弘，集合論・入門　無限への誘い，遊星社 (2004).