数 理 科 学

2008 年秋学期@中部大学

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp

http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

2008 年 10 月 23 日（第 5 回目）の講義 (October 30, 2008 (14:42) 版)

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

行列　（前回の復習）

数学的な対象を縦横に四角くならべて括弧でくくった表現のことを **行列** (**matrix**) という．

例．

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1\text{列} & 2\text{列} & 3\text{列} & 4\text{列} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\text{行} \to \\ 2\text{行} \to \\ 3\text{行} \to \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & 2.6 \\ 10 & 0 & 3.4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

行列 （前回の復習）

数学的な対象を縦横に四角くならべて括弧でくくった表現のことを **行列** (**matrix**) という.

例.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{1 列} & \text{2 列} & \text{3 列} & \text{4 列} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{1 行} \rightarrow \\ \text{2 行} \rightarrow \\ \text{3 行} \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & 2.6 \\ 10 & 0 & 3.4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

行列の要素の二重添字による表現

一般的な行列を表すために，$a_{3,2}$ のような二重添字のついた文字を用いることが多い．たとえば，$a_{3,2}$ で行列の 3 行 2 列目の要素をあらわす．

行列の縦横のサイズもたとえば文字 m, n などで表して，不定のまま扱うことがある．

例．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & \cdots & & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

上のような行列を m-行 n-列の行列，または (m, n)-行列 とよぶ．

行列の要素の二重添字による表現

一般的な行列を表すために，$a_{3,2}$ のような二重添字のついた文字を用いることが多い．たとえば，$a_{3,2}$ で行列の 3 行 2 列目の要素をあらわす．

行列の縦横のサイズもたとえば文字 m, n などで表して，不定のまま扱うことがある．

例．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & \cdots & & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

上のような行列を m-行 n-列の行列，または (m, n)-行列 とよぶ．

行列の要素の二重添字による表現

一般的な行列を表すために，$a_{3,2}$ のような二重添字のついた文字を用いることが多い．たとえば，$a_{3,2}$ で行列の 3 行 2 列目の要素をあらわす．

行列の縦横のサイズもたとえば文字 m, n などで表して，不定のまま扱うことがある．

例．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & \cdots & & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

上のような行列を m-行 n-列の行列，または (m, n)-行列 とよぶ．

行列の要素の二重添字による表現

一般的な行列を表すために，$a_{3,2}$ のような二重添字のついた文字を用いることが多い．たとえば，$a_{3,2}$ で行列の 3 行 2 列目の要素をあらわす．

行列の縦横のサイズもたとえば文字 m, n などで表して，不定のまま扱うことがある．

例．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & \cdots & & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

上のような行列を m-行 n-列の行列，または (m, n)-行列 とよぶ．

連立方程式の行列による表現

連立方程式は，その係数（連立方程式にあらわれる定数）をならべなおすことで行列に翻訳できるのだった

例.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 6x + 4z = 8 \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

行列の基本変形の何回かの適用で，この行列を階段行列に変形する（掃き出し法）ことで，連立方程式を機械的に解くことができる.

連立方程式の行列による表現

連立方程式は，その係数（連立方程式にあらわれる定数）をならべなおすことで行列に翻訳できるのだった

例．

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 6x + 4z = 8 \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

行列の基本変形の何回かの適用で，この行列を階段行列に変形する（掃き出し法）ことで，連立方程式を機械的に解くことができる．

連立方程式の行列による表現

連立方程式は，その係数（連立方程式にあらわれる定数）をならべなおすことで行列に翻訳できるのだった

例.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 6x + 4z = 8 \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

行列の基本変形の何回かの適用で，この行列を階段行列に変形する（掃き出し法）ことで，連立方程式を機械的に解くことができる.

連立方程式の行列による表現

連立方程式は，その係数（連立方程式にあらわれる定数）をならべなおすことで行列に翻訳できるのだった

例.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 6x + 4z = 8 \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

行列の基本変形の何回かの適用で，この行列を階段行列に変形する（掃き出し法）ことで，連立方程式を機械的に解くことができる.

連立方程式の行列による表現

連立方程式は，その係数（連立方程式にあらわれる定数）をならべなおすことで行列に翻訳できるのだった

例.

$$\begin{cases} 3x+2y+4z=3 \\ x+3y-2z=1 \\ 6x+4z=8 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

行列の基本変形の何回かの適用で，この行列を階段行列に変形する（掃き出し法）ことで，連立方程式を機械的に解くことができる.

連立方程式の行列による表現 (2)

より一般的には:

$$
\begin{cases}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\
a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \cdots + a_{3,n}x_n = b_3 \\
\qquad\qquad\vdots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m
\end{cases}
$$

$$
\leftrightsquigarrow
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\
 & & \vdots & & \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m
\end{pmatrix}
$$

連立方程式の行列による表現 (2)

より一般的には:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \cdots + a_{3,n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

連立方程式の行列による表現 (2)

より一般的には:

$$
\begin{cases}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\
a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \cdots + a_{3,n}x_n = b_3 \\
\qquad\qquad\vdots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m
\end{cases}
$$

$$
\leftrightsquigarrow
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\
 & & \vdots & & \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m
\end{pmatrix}
$$

連立方程式の掃き出し法による解法

連立方程式の問題

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 6x + 4z = 8 \end{cases}$$

行列の基本変形

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{cccc} \color{red}{0} & -7 & 10 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & -\frac{68}{7} & 2 \end{array} \right)$$

連立方程式の掃き出し法による解法

例.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 6x + 4z = 8 \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \quad \text{1 行と 2 行を入れかえる}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1 行 $\times 3$ を 2 行から引き,
1 行 $\times 6$ を 3 行から引く

$$\Big\downarrow$$

連立方程式の掃き出し法による解法

例.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 6x + 4z = 8 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1 行と 2 行を入れかえる $\downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1 行 $\times 3$ を 2 行から引き,
1 行 $\times 6$ を 3 行から引く $\downarrow$

連立方程式の掃き出し法による解法

例.

$$\begin{cases} 3x+2y+4z=3 \\ x+3y-2z=1 \\ 6x+4z=8 \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1 行と 2 行を入れかえる $\downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1 行 $\times 3$ を 2 行から引き,
1 行 $\times 6$ を 3 行から引く $\downarrow$

連立方程式の掃き出し法による解法

例.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 6x + 4z = 8 \end{cases} \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \text{1 行と 2 行を入れかえる}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \text{1 行 } \times 3 \text{ を 2 行から引き，1 行 } \times 6 \text{ を 3 行から引く}$$

連立方程式の掃き出し法による解法

例.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 6x + 4z = 8 \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1 行と 2 行を入れかえる $\downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1 行 $\times 3$ を 2 行から引き,
1 行 $\times 6$ を 3 行から引く $\downarrow$

連立方程式の掃き出し法による解法

例.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 6x + 4z = 8 \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1 行と 2 行を入れかえる $\downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1 行 $\times 3$ を 2 行から引き,
1 行 $\times 6$ を 3 行から引く $\downarrow$

1 行 $\times 3$ を 2 行から引き，
1 行 $\times 6$ を 3 行から引く

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & -18 & 16 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

2 行 $\times \frac{18}{7}$ を 3 行から引く

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ -7y + 10z = 0 \\ -\frac{68}{7}z = 2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{68}{7} & 2 \end{pmatrix}$$

この連立方程式を下の式から解いてゆく: 3 番目の式から $z = -\frac{7}{34}$.
これを 2 番目の式に代入すると: $-7y + 10 \times (-\frac{7}{34}) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{17}$. これらの値を 1 番目の式に代入すると:
$x + 3 \times \frac{10}{34} - 2 \times (-\frac{7}{34}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{25}{17}$

1 行 $\times 3$ を 2 行から引き，
1 行 $\times 6$ を 3 行から引く

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & -18 & 16 & 2 \end{pmatrix}$$

2 行 $\times \frac{18}{7}$ を 3 行から引く

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ -7y + 10z = 0 \\ -\frac{68}{7} z = 2 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{68}{7} & 2 \end{pmatrix}$$

この連立方程式を下の式から解いてゆく: 3 番目の式から $z = -\frac{7}{34}$.
これを 2 番目の式に代入すると: $-7y + 10 \times (-\frac{7}{34}) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{17}$. これらの値を 1 番目の式に代入すると:
$x + 3 \times \frac{10}{34} - 2 \times (-\frac{7}{34}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{25}{17}$

1 行 $\times 3$ を 2 行から引き,
1 行 $\times 6$ を 3 行から引く

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & -18 & 16 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

2 行 $\times \frac{18}{7}$ を 3 行から引く

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ -7y + 10z = 0 \\ -\frac{68}{7} z = 2 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{68}{7} & 2 \end{pmatrix}$$

この連立方程式を下の式から解いてゆく: 3 番目の式から $z = -\frac{7}{34}$.
これを 2 番目の式に代入すると: $-7y + 10 \times (-\frac{7}{34}) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{17}$. これらの値を 1 番目の式に代入すると:
$x + 3 \times \frac{10}{34} - 2 \times (-\frac{7}{34}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{25}{17}$

1 行 $\times 3$ を 2 行から引き，
1 行 $\times 6$ を 3 行から引く

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & -18 & 16 & 2 \end{pmatrix}$$

2 行 $\times \frac{18}{7}$ を 3 行から引く

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ -7y + 10z = 0 \\ -\frac{68}{7} z = 2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{68}{7} & 2 \end{pmatrix}$$

この連立方程式を下の式から解いてゆく: 3 番目の式から $z = -\frac{7}{34}$.
これを 2 番目の式に代入すると: $-7y + 10 \times (-\frac{7}{34}) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{17}$. これらの値を 1 番目の式に代入すると:
$x + 3 \times \frac{10}{34} - 2 \times (-\frac{7}{34}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{25}{17}$

1 行 $\times 3$ を 2 行から引き,
1 行 $\times 6$ を 3 行から引く

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & -18 & 16 & 2 \end{pmatrix}$$

2 行 $\times \frac{18}{7}$ を 3 行から引く

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ -7y + 10z = 0 \\ -\frac{68}{7}z = 2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{68}{7} & 2 \end{pmatrix}$$

この連立方程式を下の式から解いてゆく: 3 番目の式から $z = -\frac{7}{34}$.
これを 2 番目の式に代入すると: $-7y + 10 \times (-\frac{7}{34}) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{17}$. これらの値を 1 番目の式に代入すると:
$x + 3 \times \frac{10}{34} - 2 \times (-\frac{7}{34}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{25}{17}$

1 行 $\times 3$ を 2 行から引き，
1 行 $\times 6$ を 3 行から引く

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & -18 & 16 & 2 \end{pmatrix}$$

2 行 $\times \frac{18}{7}$ を 3 行から引く

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ -7y + 10z = 0 \\ -\frac{68}{7} z = 2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{68}{7} & 2 \end{pmatrix}$$

この連立方程式を下の式から解いてゆく: 3 番目の式から $z = -\frac{7}{34}$.

これを 2 番目の式に代入すると: $-7y + 10 \times (-\frac{7}{34}) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{17}$. これらの値を 1 番目の式に代入すると: $x + 3 \times \frac{10}{34} - 2 \times (-\frac{7}{34}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{25}{17}$

1 行 $\times 3$ を 2 行から引き,
1 行 $\times 6$ を 3 行から引く

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ \color{red}{0} & -7 & 10 & 0 \\ \color{red}{0} & -18 & 16 & 2 \end{pmatrix}$$

2 行 $\times \frac{18}{7}$ を 3 行から引く

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ -7y + 10z = 0 \\ -\frac{68}{7} z = 2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ \color{red}{0} & -7 & 10 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & -\frac{68}{7} & 2 \end{pmatrix}$$

この連立方程式を下の式から解いてゆく: 3 番目の式から
$z = -\frac{7}{34}$.
これを 2 番目の式に代入すると: $-7y + 10 \times (-\frac{7}{34}) = 0 \Leftrightarrow$
$y = -\frac{5}{17}$. これらの値を 1 番目の式に代入すると:
$x + 3 \times \frac{10}{34} - 2 \times (-\frac{7}{34}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{25}{17}$

1 行 $\times 3$ を 2 行から引き,
1 行 $\times 6$ を 3 行から引く

$$\Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & -18 & 16 & 2 \end{pmatrix}$$

2 行 $\times \frac{18}{7}$ を 3 行から引く

$$\Big\downarrow$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ -7y + 10z = 0 \\ -\frac{68}{7} z = 2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{68}{7} & 2 \end{pmatrix}$$

この連立方程式を下の式から解いてゆく: 3 番目の式から
$z = -\frac{7}{34}$.
これを 2 番目の式に代入すると: $-7y + 10 \times (-\frac{7}{34}) = 0 \Leftrightarrow$
$y = -\frac{5}{17}$. これらの値を 1 番目の式に代入すると:
$x + 3 \times \frac{10}{34} - 2 \times (-\frac{7}{34}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{25}{17}$

ベクトル

行列の特別な場合として，ベクトル (**vector**) がある．m 行 1 列の行列を m-次元ベクトルという．たとえば，$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 4-次元ベクトルの 1 つである．

実数（real numbers, 数直線上の点としてあらわされる数）の全体を $\mathbb{R}$ であらわす．要素がすべて実数であるような m-次元ベクトルの全体を $\mathbb{R}^m$ であらわし，m-次元ベクトル空間 とか 実 m-次元ベクトル空間とよぶ．たとえば，上のベクトルは，4-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の要素の 1 つである．

3-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の要素は，たとえば $\begin{pmatrix} 3 \\ 5.1 \\ -1.67 \end{pmatrix}$ のような形をしているが，このようなベクトルの 3 つの要素が物理的な空間（を理想化したもの）の点の座標をあらわしていると考えることで，$\mathbb{R}^3$ と物理的な空間（を理想化したもの）を同一視できる．“空間” という言い回しは，このような見方から来ている．

$\mathbb{R}^3$ の要素 $\mathbf{x}$ は，空間の原点から $\mathbf{x}$ を座標とする点へひかれた矢印（ベクトル）と同一視されることも多い．

行列の特別な場合として，ベクトル (vector) がある．m 行 1 列の行列を m-次元ベクトルという．たとえば，$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 4-次元ベクトルの 1 つである．

実数（real numbers, 数直線上の点としてあらわされる数）の全体を $\mathbb{R}$ であらわす．要素がすべて実数であるような m-次元ベクトルの全体を $\mathbb{R}^m$ であらわし，m-次元ベクトル空間 とか 実 m-次元ベクトル空間とよぶ．たとえば，上のベクトルは，4-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の要素の 1 つである．

3-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の要素は，たとえば $\begin{pmatrix} 3 \\ 5.1 \\ -1.67 \end{pmatrix}$ のような形をしているが，このようなベクトルの 3 つの要素が物理的な空間（を理想化したもの）の点の座標をあらわしていると考えることで，$\mathbb{R}^3$ と物理的な空間（を理想化したもの）を同一視できる．“空間” という言い回しは，このような見方から来ている．

$\mathbb{R}^3$ の要素 x は，空間の原点から x を座標とする点へひかれた矢印（ベクトル）と同一視されることも多い．

ベクトル

行列の特別な場合として，ベクトル (vector) がある．m 行 1 列の行列を m-次元ベクトルという．たとえば，$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 4-次元ベクトルの 1 つである．

実数（real numbers，数直線上の点としてあらわされる数）の全体を $\mathbb{R}$ であらわす．要素がすべて実数であるような m-次元ベクトルの全体を $\mathbb{R}^m$ であらわし，m-次元ベクトル空間 とか 実 m-次元ベクトル空間とよぶ．たとえば，上のベクトルは，4-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の要素の 1 つである．

3-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の要素は，たとえば $\begin{pmatrix} 3 \\ 5.1 \\ -1.67 \end{pmatrix}$ のような形をしているが，このようなベクトルの 3 つの要素が物理的な空間（を理想化したもの）の点の座標をあらわしていると考えることで，$\mathbb{R}^3$ と物理的な空間（を理想化したもの）を同一視できる．“空間” という言い回しは，このような見方から来ている．

$\mathbb{R}^3$ の要素 $\mathbf{x}$ は，空間の原点から $\mathbf{x}$ を座標とする点へひかれた矢印（ベクトル）と同一視されることも多い．

ベクトル

行列の特別な場合として，ベクトル (vector) がある．m 行 1 列の行列を m-次元ベクトルという．たとえば，$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 4-次元ベクトルの 1 つである．

実数（real numbers, 数直線上の点としてあらわされる数）の全体を $\mathbb{R}$ であらわす．要素がすべて実数であるような m-次元ベクトルの全体を $\mathbb{R}^m$ であらわし，m-次元ベクトル空間 とか 実 m-次元ベクトル空間とよぶ．たとえば，上のベクトルは，4-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の要素の 1 つである．

3-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の要素は，たとえば $\begin{pmatrix} 3 \\ 5.1 \\ -1.67 \end{pmatrix}$ のような形をしているが，このようなベクトルの 3 つの要素が物理的な空間（を理想化したもの）の点の座標をあらわしていると考えることで，$\mathbb{R}^3$ と物理的な空間（を理想化したもの）を同一視できる．“空間” という言い回しは，このような見方から来ている．

$\mathbb{R}^3$ の要素 $\mathbf{x}$ は，空間の原点から $\mathbf{x}$ を座標とする点へひかれた矢印（ベクトル）と同一視されることも多い．

行列の特別な場合として，ベクトル (vector) がある．m 行 1 列の行列を m-次元ベクトルという．たとえば，$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 4-次元ベクトルの 1 つである．

実数（real numbers, 数直線上の点としてあらわされる数）の全体を $\mathbb{R}$ であらわす．要素がすべて実数であるような m-次元ベクトルの全体を $\mathbb{R}^m$ であらわし，m-次元ベクトル空間 とか 実 m-次元ベクトル空間とよぶ．たとえば，上のベクトルは，4-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の要素の 1 つである．

3-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の要素は，たとえば $\begin{pmatrix} 3 \\ 5.1 \\ -1.67 \end{pmatrix}$ のような形をしているが，このようなベクトルの 3 つの要素が物理的な空間（を理想化したもの）の点の座標をあらわしていると考えることで，$\mathbb{R}^3$ と物理的な空間（を理想化したもの）を同一視できる．“空間” という言い回しは，このような見方から来ている．

$\mathbb{R}^3$ の要素 x は，空間の原点から x を座標とする点へひかれた矢印（ベクトル）と同一視されることも多い．

ベクトル

行列の特別な場合として，ベクトル (vector) がある．m 行 1 列の行列を m-次元ベクトルという．たとえば，$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 4-次元ベクトルの 1 つである．

実数（real numbers, 数直線上の点としてあらわされる数）の全体を $\mathbb{R}$ であらわす．要素がすべて実数であるような m-次元ベクトルの全体を $\mathbb{R}^m$ であらわし，m-次元ベクトル空間 とか 実 m-次元ベクトル空間とよぶ．たとえば，上のベクトルは，4-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の要素の 1 つである．

3-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の要素は，たとえば $\begin{pmatrix} 3 \\ 5.1 \\ -1.67 \end{pmatrix}$ のような形をしているが，このようなベクトルの 3 つの要素が物理的な空間（を理想化したもの）の点の座標をあらわしていると考えることで，$\mathbb{R}^3$ と物理的な空間（を理想化したもの）を同一視できる．“空間” という言い回しは，このような見方から来ている．

$\mathbb{R}^3$ の要素 x は，空間の原点から x を座標とする点へひかれた矢印（ベクトル）と同一視されることも多い．

ベクトル

行列の特別な場合として，**ベクトル** (**vector**) がある． m 行 1 列の行列を m-次元ベクトルという．たとえば，$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 4-次元ベクトルの 1 つである．

実数（real numbers, 数直線上の点としてあらわされる数）の全体を $\mathbb{R}$ であらわす．要素がすべて実数であるような m-次元ベクトルの全体を $\mathbb{R}^m$ であらわし，**m-次元ベクトル空間** とか **実 m-次元ベクトル空間**とよぶ．たとえば，上のベクトルは，4-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の要素の 1 つである．

3-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の要素は，たとえば $\begin{pmatrix} 3 \\ 5.1 \\ -1.67 \end{pmatrix}$ のような形をしているが，このようなベクトルの 3 つの要素が物理的な空間（を理想化したもの）の点の座標をあらわしていると考えることで，$\mathbb{R}^3$ と物理的な空間（を理想化したもの）を同一視できる．“空間” という言い回しは，このような見方から来ている．

$\mathbb{R}^3$ の要素 $\mathbf{x}$ は，空間の原点から $\mathbf{x}$ を座標とする点へひかれた矢印（ベクトル）と同一視されることも多い．

ベクトル

行列の特別な場合として，**ベクトル (vector)** がある． m 行 1 列の行列を m-次元ベクトルという． たとえば， $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 4-次元ベクトルの 1 つである．

実数（real numbers, 数直線上の点としてあらわされる数）の全体を $\mathbb{R}$ であらわす． 要素がすべて実数であるような m-次元ベクトルの全体を $\mathbb{R}^m$ であらわし， **m-次元ベクトル空間** とか **実 m-次元ベクトル空間**とよぶ． たとえば， 上のベクトルは， 4-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の要素の 1 つである．

3-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の要素は， たとえば $\begin{pmatrix} 3 \\ 5.1 \\ -1.67 \end{pmatrix}$ のような形をしているが， このようなベクトルの 3 つの要素が物理的な空間（を理想化したもの）の点の座標をあらわしていると考えることで， $\mathbb{R}^3$ と物理的な空間（を理想化したもの）を同一視できる． “空間” という言い回しは， このような見方から来ている．

$\mathbb{R}^3$ の要素 $\mathbf{x}$ は， 空間の原点から $\mathbf{x}$ を座標とする点へひかれた矢印（ベクトル）と同一視されることも多い．

ベクトル

行列の特別な場合として，**ベクトル (vector)** がある．m 行 1 列の行列を m-次元ベクトルという．たとえば，$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 4-次元ベクトルの 1 つである．

実数（real numbers, 数直線上の点としてあらわされる数）の全体を $\mathbb{R}$ であらわす．要素がすべて実数であるような m-次元ベクトルの全体を $\mathbb{R}^m$ であらわし，**m-次元ベクトル空間** とか **実 m-次元ベクトル空間**とよぶ．たとえば，上のベクトルは，4-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の要素の 1 つである．

3-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の要素は，たとえば $\begin{pmatrix} 3 \\ 5.1 \\ -1.67 \end{pmatrix}$ のような形をしているが，このようなベクトルの 3 つの要素が物理的な空間（を理想化したもの）の点の座標をあらわしていると考えることで，$\mathbb{R}^3$ と物理的な空間（を理想化したもの）を同一視できる．
“空間” という言い回しは，このような見方から来ている．

$\mathbb{R}^3$ の要素 $\mathbf{x}$ は，空間の原点から $\mathbf{x}$ を座標とする点へひかれた矢印（ベクトル）と同一視されることも多い．

連立方程式の行列によるもう 1 つの表現

A を m 行 n 列の行列として，その要素を $a_{i,j}$ とする．また $\mathbf{b}$ を n 次元ベクトルとしてその要素を b_j であらわすことにする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

このとき，A と $\mathbf{b}$ の積 $A\mathbf{b}$ を，

$$A\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

と定める．ただし，

連立方程式の行列によるもう１つの表現

A を m 行 n 列の行列として，その要素を $a_{i,j}$ とする．また $\mathbf{b}$ を n 次元ベクトルとしてその要素を b_j であらわすことにする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

このとき，A と $\mathbf{b}$ の積 $A\mathbf{b}$ を，

$$A\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

と定める．ただし，

連立方程式の行列によるもう１つの表現

A を m 行 n 列の行列として，その要素を $a_{i,j}$ とする．また $\mathbf{b}$ を n 次元ベクトルとしてその要素を b_j であらわすことにする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

このとき，A と $\mathbf{b}$ の積 $A\mathbf{b}$ を，

$$A\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

と定める．ただし，

連立方程式の行列によるもう１つの表現

A を m 行 n 列の行列として，その要素を $a_{i,j}$ とする．また $\mathbf{b}$ を n 次元ベクトルとしてその要素を b_j であらわすことにする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

このとき，A と $\mathbf{b}$ の積 $A\mathbf{b}$ を，

$$A\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

と定める．ただし，

連立方程式の行列によるもう１つの表現

このとき，A と $\mathbf{b}$ の積 $A\mathbf{b}$ を，

$$A\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

と定める．ただし，

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{1,1}b_1 + a_{1,2}b_2 + a_{1,3}b_3 + \cdots + a_{1,n}b_n \\ c_2 &= a_{2,1}b_1 + a_{2,2}b_2 + a_{2,3}b_3 + \cdots + a_{2,n}b_n \\ &\vdots \\ c_m &= a_{m,1}b_1 + a_{m,2}b_2 + a_{m,3}b_3 + \cdots + a_{m,n}b_n \end{aligned}$$

とする．

連立方程式の行列によるもう１つの表現

このとき，A と $\mathbf{b}$ の積 $A\mathbf{b}$ を，

$$A\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

と定める．ただし，

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{1,1}b_1 + a_{1,2}b_2 + a_{1,3}b_3 + \cdots + a_{1,n}b_n \\ c_2 &= a_{2,1}b_1 + a_{2,2}b_2 + a_{2,3}b_3 + \cdots + a_{2,n}b_n \\ &\vdots \\ c_m &= a_{m,1}b_1 + a_{m,2}b_2 + a_{m,3}b_3 + \cdots + a_{m,n}b_n \end{aligned}$$

とする．

連立方程式の行列によるもう１つの表現

行列とベクトルの積の記法を用いると，連立方程式は次のように表現することもできる:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \cdots + a_{3,n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

連立方程式の行列によるもう１つの表現

行列とベクトルの積の記法を用いると，連立方程式は次のように表現することもできる:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \cdots + a_{3,n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

連立方程式の行列によるもう１つの表現

行列とベクトルの積の記法を用いると，連立方程式は次のように表現することもできる:

$$
\begin{cases}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\
a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \cdots + a_{3,n}x_n = b_3 \\
\qquad\qquad \vdots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m
\end{cases}
$$

$$
\leftrightsquigarrow
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\
 & & \vdots & \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m
\end{pmatrix}
$$

連立方程式の行列とベクトルの積による表現

または，$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ として，上のベクトルの間の等式は，

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ とあらわすこともできる．

連立方程式の行列とベクトルの積による表現

または， $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ として，上のベクトルの間の等式は，

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ とあらわすこともできる．

連立方程式の行列とベクトルの積による表現

または, $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ として, 上のベクトルの間の等式は,

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ とあらわすこともできる.

連立方程式の行列とベクトルの積による表現

または，$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ として，上のベクトルの間の等式は，

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ とあらわすこともできる．

連立方程式の行列とベクトルの積による表現

連立方程式の，ベクトルに関する方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ よる表現は，

> 「行列 A を左からかける」という操作を行なったとき，ベクトル $\mathbf{b}$ が得られるようなベクトル $\mathbf{x}$ は何か?

という問題として捉えなおすこともできる．

一つの固定された m 行 n 列行列を左からかけるという操作を行なうことで，n 次元ベクトルが m 次元ベクトルに「変換」される．n 次元ベクトルの全体からなる "空間"（n 次元ベクトル空間）を $\mathbb{R}^n$ と表すことしたが，これを使うと，m 行 n 列行列 A を左からかけるという操作は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数と見ることができる．この関数をここでは，f_A とあらわすことにする．

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \quad \mathbf{c} \mapsto A\mathbf{c}$$

である．

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ の関数のすべてが f_A の形に表されるわけではない．

連立方程式の行列とベクトルの積による表現

連立方程式の，ベクトルに関する方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ よる表現は，

「行列 A を左からかける」という操作を行なったとき，ベクトル $\mathbf{b}$ が得られるようなベクトル $\mathbf{x}$ は何か?

という問題として捉えなおすこともできる．

一つの固定された m 行 n 列行列を左からかけるという操作を行なうことで，n 次元ベクトルが m 次元ベクトルに「変換」される．n 次元ベクトルの全体からなる "空間"（n 次元ベクトル空間）を $\mathbb{R}^n$ と表すことしたが，これを使うと，m 行 n 列行列 A を左からかけるという操作は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数と見ることができる．この関数をここでは，f_A とあらわすことにする．

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \quad \mathbf{c} \mapsto A\mathbf{c}$$

である．

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ の関数のすべてが f_A の形に表されるわけではない．

連立方程式の行列とベクトルの積による表現

連立方程式の，ベクトルに関する方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ よる表現は，

「行列 A を左からかける」という操作を行なったとき，ベクトル $\mathbf{b}$ が得られるようなベクトル $\mathbf{x}$ は何か?

という問題として捉えなおすこともできる．

一つの固定された m 行 n 列行列を左からかけるという操作を行なうことで，n 次元ベクトルが m 次元ベクトルに「変換」される．n 次元ベクトルの全体からなる “空間”（n 次元ベクトル空間）を $\mathbb{R}^n$ と表すことしたが，これを使うと，m 行 n 列行列 A を左からかけるという操作は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数と見ることができる．この関数をここでは，f_A とあらわすことにする．

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \quad \mathbf{c} \mapsto A\mathbf{c}$$

である．

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ の関数のすべてが f_A の形に表されるわけではない．

連立方程式の行列とベクトルの積による表現

連立方程式の，ベクトルに関する方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ よる表現は，

「行列 A を左からかける」という操作を行なったとき，ベクトル $\mathbf{b}$ が得られるようなベクトル $\mathbf{x}$ は何か?

という問題として捉えなおすこともできる．

一つの固定された m 行 n 列行列を左からかけるという操作を行なうことで，n 次元ベクトルが m 次元ベクトルに「変換」される．n 次元ベクトルの全体からなる "空間"（n 次元ベクトル空間）を $\mathbb{R}^n$ と表すことしたが，これを使うと，m 行 n 列行列 A を左からかけるという操作は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数と見ることができる．この関数をここでは，f_A とあらわすことにする．

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \quad \mathbf{c} \mapsto A\mathbf{c}$$

である．

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ の関数のすべてが f_A の形に表されるわけではない．

定理 1

n, m を（0 と異なる）自然数とする．$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数 f に対し $f = f_A$ となるような m 行 n 列の行列 A が存在するのは，f が線形写像であるちょうどそのときである．

解説． $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} : b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$ だった．（$\mathbb{R}$ は実数全体）

n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ には，次のようにして足し算 と 定数倍 の構造を自然に入れることができる:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ \vdots \\ b_n + c_n \end{pmatrix} \qquad a \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ab_1 \\ ab_2 \\ \vdots \\ ab_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像（関数）f が 線型写像 であるとは，すべての $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ と $c \in \mathbb{R}$ に対し，$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$，$f(c\mathbf{a}) = cf(\mathbf{a})$ が成り立つこと．

定理 1

n, m を（0 と異なる）自然数とする．$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数 f に対し $f = f_A$ となるような m 行 n 列の行列 A が存在するのは，f が線形写像であるちょうどそのときである．

解説． $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} : b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$ だった．（$\mathbb{R}$ は実数全体）

n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ には，次のようにして足し算 と 定数倍 の構造を自然に入れることができる:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ \vdots \\ b_n + c_n \end{pmatrix} \qquad a \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ab_1 \\ ab_2 \\ \vdots \\ ab_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像（関数）f が 線型写像 であるとは，すべての $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ と $c \in \mathbb{R}$ に対し，$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$, $f(c\mathbf{a}) = cf(\mathbf{a})$ が成り立つこと．

定理 1

n, m を（0 と異なる）自然数とする．$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数 f に対し $f = f_A$ となるような m 行 n 列の行列 A が存在するのは，f が線形写像であるちょうどそのときである．

解説． $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} : b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$ だった．（$\mathbb{R}$ は実数全体）

n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ には，次のようにして**足し算** と **定数倍** の構造を自然に入れることができる:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ \vdots \\ b_n + c_n \end{pmatrix} \qquad a \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ab_1 \\ ab_2 \\ \vdots \\ ab_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像（関数）f が **線型写像** であるとは，すべての $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ と $c \in \mathbb{R}$ に対し，$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$, $f(c\mathbf{a}) = cf(\mathbf{a})$ が成り立つこと．

定理 1

n, m を（0 と異なる）自然数とする．$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数 f に対し $f = f_A$ となるような m 行 n 列の行列 A が存在するのは，f が線形写像であるちょうどそのときである．

解説． $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} : b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$ だった．（$\mathbb{R}$ は実数全体）

n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ には，次のようにして足し算 と 定数倍 の構造を自然に入れることができる:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ \vdots \\ b_n + c_n \end{pmatrix} \qquad a \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ab_1 \\ ab_2 \\ \vdots \\ ab_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像（関数）f が 線型写像 であるとは，すべての $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ と $c \in \mathbb{R}$ に対し，$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$, $f(c\mathbf{a}) = cf(\mathbf{a})$ が成り立つこと．

定理 1

n, m を（0 と異なる）自然数とする．$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数 f に対し $f = f_A$ となるような m 行 n 列の行列 A が存在するのは，f が線形写像であるちょうどそのときである．

解説． $\mathbb{R}^n = \{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} : b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{R}\}$ だった．（$\mathbb{R}$ は実数全体）

n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ には，次のようにして足し算 と 定数倍 の構造を自然に入れることができる:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ \vdots \\ b_n + c_n \end{pmatrix} \qquad a \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ab_1 \\ ab_2 \\ \vdots \\ ab_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像（関数）f が 線型写像 であるとは，すべての $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ と $c \in \mathbb{R}$ に対し，$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$，$f(c\mathbf{a}) = cf(\mathbf{a})$ が成り立つこと．

線型写像とアファイン写像

$\mathbf{0}$ でゼロベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ をあらわすことにする.

前ページで n 次元ベクトル空間に「足し算と定数倍が自然に定義される」と言ったのは，ここで定義した足し算と定数倍がゼロベクトルと共に数の足し算や定数倍とよく似た性質を持つものになる，という意味で「自然」と言える，ということである.

定理 2

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線型写像とするとき，$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が成り立つ.

証明. この定理は前の定理から明らかだが，ここでは線型写像の定義から直接証明する．ベクトルの足し算の定義から $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ となることに注意すると，f が線型写像であることから $f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0})$ ここで，両端の辺から $f(\mathbf{0})$ を引く（つまり $f(\mathbf{0})$ の -1 倍を足す）と，$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が得られる. □

線型写像とアファイン写像

$\mathbf{0}$ でゼロベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ をあらわすことにする.

前ページで n 次元ベクトル空間に「足し算と定数倍が自然に定義される」と言ったのは，ここで定義した足し算と定数倍がゼロベクトルと共に数の足し算や定数倍とよく似た性質を持つものになる，という意味で「自然」と言える，ということである.

定理 2

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線型写像とするとき，$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が成り立つ.

証明. この定理は前の定理から明らかだが，ここでは線型写像の定義から直接証明する．ベクトルの足し算の定義から $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ となることに注意すると，f が線型写像であることから
$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0})$ ここで，両端の辺から $f(\mathbf{0})$ を引く（つまり $f(\mathbf{0})$ の -1 倍を足す）と，$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が得られる. □

線型写像とアファイン写像

$\mathbf{0}$ でゼロベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ をあらわすことにする.

前ページで n 次元ベクトル空間に「足し算と定数倍が自然に定義される」と言ったのは，ここで定義した足し算と定数倍がゼロベクトルと共に数の足し算や定数倍とよく似た性質を持つものになる，という意味で「自然」と言える，ということである.

定理 2

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線型写像とするとき，$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が成り立つ.

証明. この定理は前の定理から明らかだが，ここでは線型写像の定義から直接証明する．ベクトルの足し算の定義から $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ となることに注意すると，f が線型写像であることから $f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0})$ ここで，両端の辺から $f(\mathbf{0})$ を引く（つまり $f(\mathbf{0})$ の -1 倍を足す）と，$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が得られる. □

線型写像とアフィン写像

$\mathbf{0}$ でゼロベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ をあらわすことにする．

前ページで n 次元ベクトル空間に「足し算と定数倍が自然に定義される」と言ったのは，ここで定義した足し算と定数倍がゼロベクトルと共に数の足し算や定数倍とよく似た性質を持つものになる，という意味で「自然」と言える，ということである．

定理 2

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線型写像とするとき，$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が成り立つ．

証明． この定理は前の定理から明らかだが，ここでは線型写像の定義から直接証明する．ベクトルの足し算の定義から $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ となることに注意すると，f が線型写像であることから
$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0})$ ここで，両端の辺から $f(\mathbf{0})$ を引く（つまり $f(\mathbf{0})$ の -1 倍を足す）と，$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が得られる． □

線型写像とアファイン写像 （続）

f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像とすると，前ページの定理から $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ だが，$\mathbf{b}$ を $\mathbb{R}^m$ のベクトルとして，

$$g(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{b}$$

の形で表せる $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数のことを，アファイン関数 とよぶ．アファイン関数は，一次関数の一般化となっている．

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ へのすべての関数がアファイン関数ではないが，（変数の変化に従って）十分になめらかに値の変化するような関数はアファイン関数で近似できる（一次近似）．

解説． 「近似（きんじ）できる」とは，（ある程度）似たものとして代用できる，というような意味．

線型写像とアファイン写像（続）

f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像とすると，前ページの定理から $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ だが，$\mathbf{b}$ を $\mathbb{R}^m$ のベクトルとして，

$$g(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{b}$$

の形で表せる $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数のことを，アファイン関数 とよぶ．アファイン関数は，一次関数の一般化となっている．

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ へのすべての関数がアファイン関数ではないが，（変数の変化に従って）十分になめらかに値の変化するような関数はアファイン関数で近似できる（一次近似）．

解説． 「近似（きんじ）できる」とは，（ある程度）似たものとして代用できる，というような意味．

線型写像とアファイン写像（続）

f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像とすると，前ページの定理から $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ だが，$\mathbf{b}$ を $\mathbb{R}^m$ のベクトルとして，

$$g(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{b}$$

の形で表せる $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数のことを，アファイン関数 とよぶ．アファイン関数は，一次関数の一般化となっている．

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ へのすべての関数がアファイン関数ではないが,（変数の変化に従って）十分になめらかに値の変化するような関数はアファイン関数で近似できる（一次近似）．

解説． 「近似（きんじ）できる」とは,（ある程度）似たものとして代用できる，というような意味．

線型写像とアファイン写像（続）

f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像とすると，前ページの定理から $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ だが，$\mathbf{b}$ を $\mathbb{R}^m$ のベクトルとして，

$$g(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{b}$$

の形で表せる $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数のことを，アファイン関数 とよぶ．アファイン関数は，一次関数の一般化となっている．

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ へのすべての関数がアファイン関数ではないが，（変数の変化に従って）十分になめらかに値の変化するような関数はアファイン関数で近似できる（一次近似）．

解説． 「近似（きんじ）できる」とは，（ある程度）似たものとして代用できる，というような意味．

次回予告:

北まだらふくろうの個体数の遷移と森林保護

終

次回予告:

北まだらふくろうの個体数の遷移と森林保護

終