数 理 科 学

2008 年秋学期@中部大学

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp

http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

2008 年 11 月 6 日（第 7 回目）の講義 (November 6, 2008 (17:47) 版)

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

前回の黒板での説明の要約

行列と行列の積（かけ算）を定義して，この演算が，線型写像の合成に対応するものになっていることを示した．

行列と行列の積を用いて，北まだらフクロウの個体数の推移のモデルの解析法を考察した．

前回の黒板での説明の要約

行列と行列の積（かけ算）を定義して，この演算が，線型写像の合成に対応するものになっていることを示した．

行列と行列の積を用いて，北まだらフクロウの個体数の推移のモデルの解析法を考察した．

前回の黒板での説明の要約

行列と行列の積（かけ算）を定義して，この演算が，線型写像の合成に対応するものになっていることを示した.

行列と行列の積を用いて，北まだらフクロウの個体数の推移のモデルの解析法を考察した.

行列と行列の積

A を $(\ell, \mathbf{m})$-行列，B を $(\mathbf{m}, n)$-行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell,1} & a_{\ell,2} & \cdots & a_{\ell,m} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

として，A と B の積 AB を，次のような (ℓ, n)-行列とする:

$$AB = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{\ell,1} & c_{\ell,2} & \cdots & c_{\ell,n} \end{pmatrix}$$

ただし，$1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq n$ に対し，

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \cdots + a_{i,m} b_{m,j}$$

行列と行列の積

A を $(\ell, \mathbf{m})$-行列，B を $(\mathbf{m}, n)$-行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell,1} & a_{\ell,2} & \cdots & a_{\ell,m} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

として，A と B の積 AB を，次のような (ℓ, n)-行列とする:

$$AB = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{\ell,1} & c_{\ell,2} & \cdots & c_{\ell,n} \end{pmatrix}$$

ただし，$1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq n$ に対し，

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}b_{m,j}$$

行列と行列の積

A を $(\ell, \mathbf{m})$-行列，B を $(\mathbf{m}, n)$-行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell,1} & a_{\ell,2} & \cdots & a_{\ell,m} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

として，A と B の積 AB を，次のような (ℓ, n)-行列とする:

$$AB = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{\ell,1} & c_{\ell,2} & \cdots & c_{\ell,n} \end{pmatrix}$$

ただし，$1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq n$ に対し，

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}b_{m,j}$$

行列と行列の積

A を $(\ell, \mathbf{m})$-行列，B を $(\mathbf{m}, n)$-行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell,1} & a_{\ell,2} & \cdots & a_{\ell,m} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

として，A と B の積 AB を，次のような (ℓ, n)-行列とする:

$$AB = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{\ell,1} & c_{\ell,2} & \cdots & c_{\ell,n} \end{pmatrix}$$

ただし，$1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq n$ に対し，

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \cdots + a_{i,m} b_{m,j}$$

行列と行列の積

$$
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,m} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{\ell,1} & a_{\ell,2} & \cdots & a_{\ell,m}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,n} \\
b_{2,1} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & b_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{m,1} & \cdots & b_{m,j} & \cdots & b_{m,n}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
 & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & c_{i,j} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
 & \cdots &
\end{pmatrix}
$$

ただし，$1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq n$ に対し，

$$
c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \cdots + a_{i,m} b_{m,j}
$$

行列と行列の積

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell,1} & a_{\ell,2} & \cdots & a_{\ell,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,j} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & c_{i,j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

ただし，$1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq n$ に対し，

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \cdots + a_{i,m} b_{m,j}$$

行列の積の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とするとき,

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -27 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

行列の積の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とするとき,

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -27 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

行列の積の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とするとき,

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -27 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

注意

(1) n-次元ベクトルは，$(n,1)$-行列と見ることもできる．

こう見たとき，前に定義した (m,n)-行列と n-次元ベクトルの積は，今定義した行列と行列の積の意味での (m,n)-行列と $(n,1)$-行列の積と一致する．

例．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -27 \end{pmatrix}$$

注意

(1) n-次元ベクトルは，$(n,1)$-行列と見ることもできる．

こう見たとき，前に定義した (m,n)-行列と n-次元ベクトルの積は，今定義した行列と行列の積の意味での (m,n)-行列と $(n,1)$-行列の積と一致する．

例．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -27 \end{pmatrix}$$

注意

(1) n-次元ベクトルは，$(n,1)$-行列と見ることもできる．

こう見たとき，前に定義した (m,n)-行列と n-次元ベクトルの積は，今定義した行列と行列の積の意味での (m,n)-行列と $(n,1)$-行列の積と一致する．

例．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -27 \end{pmatrix}$$

注意

(1) n-次元ベクトルは，$(n, 1)$-行列と見ることもできる．

こう見たとき，前に定義した (m, n)-行列と n-次元ベクトルの積は，今定義した行列と行列の積の意味での (m, n)-行列と $(n, 1)$-行列の積と一致する．

例．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -27 \end{pmatrix}$$

注意

(1) n-次元ベクトルは，$(n,1)$-行列と見ることもできる.

こう見たとき，前に定義した (m,n)-行列と n-次元ベクトルの積は，今定義した行列と行列の積の意味での (m,n)-行列と $(n,1)$-行列の積と一致する.

例.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -27 \end{pmatrix}$$

注意

(2) A を (ℓ, m)-行列， B を (m, n)-行列， C を (n, o)-行列とするとき， $A(BC)$ や $(AB)C$ が定義できる．

BC は (m, o)-行列だから， $A(BC)$ は (ℓ, o)-行列で， AB は (ℓ, n)-行列だから， $(AB)C$ も (ℓ, o)-行列である．

このとき $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ．

(行列の積の定義に従って計算して， $A(BC)$ と $(AB)C$ の各成分が等しくなることを見るとで示せる．)

このような性質が成り立つことを,「行列の積は 結合法則 を満たす」と表現する．

結合法則により， $A(BC)$ と $(AB)C$ は等しくなるから， これを略して ABC とあらわすことにする．

注意

(2) A を (ℓ, m)-行列，B を (m, n)-行列，C を (n, o)-行列とするとき，$A(BC)$ や $(AB)C$ が定義できる．

BC は (m, o)-行列だから，$A(BC)$ は (ℓ, o)-行列で，AB は (ℓ, n)-行列だから，$(AB)C$ も (ℓ, o)-行列である．

このとき $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ．

(行列の積の定義に従って計算して，$A(BC)$ と $(AB)C$ の各成分が等しくなることを見るとで示せる．)

このような性質が成り立つことを，「行列の積は 結合法則 を満たす」と表現する．

結合法則により，$A(BC)$ と $(AB)C$ は等しくなるから，これを略して ABC とあらわすことにする．

注意

(2) A を (ℓ, m)-行列， B を (m, n)-行列， C を (n, o)-行列とするとき， $A(BC)$ や $(AB)C$ が定義できる．

BC は (m, o)-行列だから， $A(BC)$ は (ℓ, o)-行列で， AB は (ℓ, n)-行列だから， $(AB)C$ も (ℓ, o)-行列である．

このとき $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ．

(行列の積の定義に従って計算して， $A(BC)$ と $(AB)C$ の各成分が等しくなることを見るとで示せる．)

このような性質が成り立つことを,「行列の積は 結合法則 を満たす」と表現する．

結合法則により， $A(BC)$ と $(AB)C$ は等しくなるから， これを略して ABC とあらわすことにする．

注意

(2) A を (ℓ, m)-行列, B を (m, n)-行列, C を (n, o)-行列とするとき, $A(BC)$ や $(AB)C$ が定義できる.

BC は (m, o)-行列だから, $A(BC)$ は (ℓ, o)-行列で, AB は (ℓ, n)-行列だから, $(AB)C$ も (ℓ, o)-行列である.

このとき $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ.

(行列の積の定義に従って計算して, $A(BC)$ と $(AB)C$ の各成分が等しくなることを見るとで示せる.)

このような性質が成り立つことを,「行列の積は 結合法則 を満たす」と表現する.

結合法則により, $A(BC)$ と $(AB)C$ は等しくなるから, これを略して ABC とあらわすことにする.

注意

(2) A を (ℓ, m)-行列，　B を (m, n)-行列，　C を (n, o)-行列とするとき，　$A(BC)$ や $(AB)C$ が定義できる．

BC は (m, o)-行列だから，　$A(BC)$ は (ℓ, o)-行列で，　AB は (ℓ, n)-行列だから，　$(AB)C$ も (ℓ, o)-行列である．

このとき $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ．

(行列の積の定義に従って計算して，　$A(BC)$ と $(AB)C$ の各成分が等しくなることを見るとで示せる．　)

このような性質が成り立つことを,「行列の積は 結合法則 を満たす」と表現する．

結合法則により，　$A(BC)$ と $(AB)C$ は等しくなるから，　これを略して ABC とあらわすことにする．

注意

(2) A を (ℓ, m)-行列， B を (m, n)-行列， C を (n, o)-行列とするとき， $A(BC)$ や $(AB)C$ が定義できる．

BC は (m, o)-行列だから， $A(BC)$ は (ℓ, o)-行列で， AB は (ℓ, n)-行列だから， $(AB)C$ も (ℓ, o)-行列である．

このとき $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ．

(行列の積の定義に従って計算して， $A(BC)$ と $(AB)C$ の各成分が等しくなることを見るとで示せる．)

このような性質が成り立つことを，「行列の積は **結合法則** を満たす」と表現する．

結合法則により， $A(BC)$ と $(AB)C$ は等しくなるから， これを略して ABC とあらわすことにする．

注意

(2) A を (ℓ, m)-行列， B を (m, n)-行列， C を (n, o)-行列とするとき， $A(BC)$ や $(AB)C$ が定義できる.

BC は (m, o)-行列だから， $A(BC)$ は (ℓ, o)-行列で， AB は (ℓ, n)-行列だから， $(AB)C$ も (ℓ, o)-行列である.

このとき $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ.

(行列の積の定義に従って計算して， $A(BC)$ と $(AB)C$ の各成分が等しくなることを見るとで示せる.)

このような性質が成り立つことを,「行列の積は 結合法則 を満たす」と表現する.

結合法則により， $A(BC)$ と $(AB)C$ は等しくなるから， これを略して ABC とあらわすことにする.

行列の積と線型写像の合成

以下では，簡単のために，(n, n)-行列を考えることにする．

A を (n, n)-行列とするとき，A を n-次元ベクトルに左からかける，という演算で n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ への線型写像 f_A が導入できるのだった．

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

逆に，すべての $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像は，f_A の形に表せる．

A と B を (n, n)-行列とするとき，f_A と f_B は両方とも $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像となるから，f_A と f_B の合成 $f_B \circ f_A$ を考えることができる．

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^n$$

$f_B \circ f_A$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像で $(f_B \circ f_A)(\mathbf{x}) = f_B(f_A(\mathbf{x}))$ である．

行列の積と線型写像の合成

以下では，簡単のために，(n, n)-行列を考えることにする.

A を (n, n)-行列とするとき，A を n-次元ベクトルに左からかける，という演算で n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ への線型写像 f_A が導入できるのだった.

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

逆に，すべての $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像は，f_A の形に表せる.

A と B を (n, n)-行列とするとき，f_A と f_B は両方とも $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像となるから，f_A と f_B の合成 $f_B \circ f_A$ を考えることができる.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^n$$

$f_B \circ f_A$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像で $(f_B \circ f_A)(\mathbf{x}) = f_B(f_A(\mathbf{x}))$ である.

行列の積と線型写像の合成

以下では，簡単のために，(n, n)-行列を考えることにする．

A を (n, n)-行列とするとき，A を n-次元ベクトルに左からかける，という演算で n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ への線型写像 f_A が導入できるのだった．

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;\quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

逆に，すべての $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像は，f_A の形に表せる．

A と B を (n, n)-行列とするとき，f_A と f_B は両方とも $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像となるから，f_A と f_B の合成 $f_B \circ f_A$ を考えることができる．

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^n$$

$f_B \circ f_A$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像で $(f_B \circ f_A)(\mathbf{x}) = f_B(f_A(\mathbf{x}))$ である．

行列の積と線型写像の合成

以下では，簡単のために，(n,n)-行列を考えることにする．

A を (n,n)-行列とするとき，A を n-次元ベクトルに左からかける，という演算で n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ への線型写像 f_A が導入できるのだった．

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

逆に，すべての $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像は，f_A の形に表せる．

A と B を (n,n)-行列とするとき，f_A と f_B は両方とも $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像となるから，f_A と f_B の合成 $f_B \circ f_A$ を考えることができる．

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^n$$

$f_B \circ f_A$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像で $(f_B \circ f_A)(\mathbf{x}) = f_B(f_A(\mathbf{x}))$ である．

行列の積と線型写像の合成

以下では，簡単のために，(n,n)-行列を考えることにする．

A を (n,n)-行列とするとき，A を n-次元ベクトルに左からかける，という演算で n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ への線型写像 f_A が導入できるのだった．

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

逆に，すべての $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像は，f_A の形に表せる．

A と B を (n,n)-行列とするとき，f_A と f_B は両方とも $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像となるから，f_A と f_B の合成 $f_B \circ f_A$ を考えることができる．

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^n$$

$f_B \circ f_A$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像で $(f_B \circ f_A)(\mathbf{x}) = f_B(f_A(\mathbf{x}))$ である．

行列の積と線型写像の合成

以下では，簡単のために，(n,n)-行列を考えることにする．

A を (n,n)-行列とするとき，A を n-次元ベクトルに左からかける，という演算で n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ への線型写像 f_A が導入できるのだった．

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

逆に，すべての $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像は，f_A の形に表せる．

A と B を (n,n)-行列とするとき，f_A と f_B は両方とも $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像となるから，f_A と f_B の合成 $f_B \circ f_A$ を考えることができる．

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^n$$

$f_B \circ f_A$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像で $(f_B \circ f_A)(\mathbf{x}) = f_B(f_A(\mathbf{x}))$ である．

行列の積と線型写像の合成

以下では，簡単のために，(n,n)-行列を考えることにする．

A を (n,n)-行列とするとき，A を n-次元ベクトルに左からかける，という演算で n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ への線型写像 f_A が導入できるのだった．

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

逆に，すべての $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像は，f_A の形に表せる．

A と B を (n,n)-行列とするとき，f_A と f_B は両方とも $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像となるから，f_A と f_B の合成 $f_B \circ f_A$ を考えることができる．

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^n$$

$f_B \circ f_A$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像で $(f_B \circ f_A)(\mathbf{x}) = f_B(f_A(\mathbf{x}))$ である．

行列の積と線型写像の合成

以下では，簡単のために，(n, n)-行列を考えることにする．

A を (n, n)-行列とするとき，A を n-次元ベクトルに左からかける，という演算で n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ への線型写像 f_A が導入できるのだった．

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

逆に，すべての $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像は，f_A の形に表せる．

A と B を (n, n)-行列とするとき，f_A と f_B は両方とも $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像となるから，f_A と f_B の合成 $f_B \circ f_A$ を考えることができる．

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^n$$

$f_B \circ f_A$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像で $(f_B \circ f_A)(\mathbf{x}) = f_B(f_A(\mathbf{x}))$ である．

行列の積と線型写像の合成

ここで，f_A と f_B の定義と結合法則を思い出すと，n 次元ベクトル空間の任意の要素 $\mathbf{x}$ に対し，

$$(f_B \circ f_A)(\mathbf{x}) = f_B(f_A(\mathbf{x})) = f_B(A\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x} = f_{BA}(\mathbf{x})$$

である．したがって，

$$f_B \circ f_A = f_{BA}$$

となるが，これは，「行列の積は（行列に対応する）線型写像の合成に対応する」ということである．

行列の積と線型写像の合成

ここで，f_A と f_B の定義と結合法則を思い出すと，n 次元ベクトル空間の任意の要素 $\mathbf{x}$ に対し，

$$(f_B \circ f_A)(\mathbf{x}) = f_B(f_A(\mathbf{x})) = f_B(A\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x} = f_{BA}(\mathbf{x})$$

である．したがって，

$$f_B \circ f_A = f_{BA}$$

となるが，これは，「行列の積は（行列に対応する）線型写像の合成に対応する」ということである．

行列の積と線型写像の合成

ここで，f_A と f_B の定義と結合法則を思い出すと，n 次元ベクトル空間の任意の要素 $\mathbf{x}$ に対し，

$$(f_B \circ f_A)(\mathbf{x}) = f_B(f_A(\mathbf{x})) = f_B(A\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x} = f_{BA}(\mathbf{x})$$

である．したがって，

$$f_B \circ f_A = f_{BA}$$

となるが，これは，「行列の積は（行列に対応する）線型写像の合成に対応する」ということである．

行列の積と線型写像の合成

ここで，f_A と f_B の定義と結合法則を思い出すと，n 次元ベクトル空間の任意の要素 $\mathbf{x}$ に対し，

$$(f_B \circ f_A)(\mathbf{x}) = f_B(f_A(\mathbf{x})) = f_B(A\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x} = f_{BA}(\mathbf{x})$$

である．したがって，

$$f_B \circ f_A = f_{BA}$$

となるが，これは，「行列の積は（行列に対応する）線型写像の合成に対応する」ということである．

行列の積と線型写像の合成

ここで，f_A と f_B の定義と結合法則を思い出すと，n 次元ベクトル空間の任意の要素 $\mathbf{x}$ に対し，

$$(f_B \circ f_A)(\mathbf{x}) = f_B(f_A(\mathbf{x})) = f_B(A\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x} = f_{BA}(\mathbf{x})$$

である．したがって，

$$f_B \circ f_A = f_{BA}$$

となるが，これは，「行列の積は（行列に対応する）線型写像の合成に対応する」ということである．

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

A を (n,n)-行列とするとき， AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n,n)-行列となる（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）．
これらを， それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くことにする．

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の行列は，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

で， $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ となるのだった．
$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = AA\mathbf{x}_0 = A^2\mathbf{x}_0$,
$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = AA^2\mathbf{x}_0 = A^3\mathbf{x}_0$, $\cdots$ だから， $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ である．

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

A を (n,n)-行列とするとき，AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n,n)-行列となる（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）.
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くことにする.

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の行列は，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

で，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ となるのだった.
$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = AA\mathbf{x}_0 = A^2\mathbf{x}_0$,
$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = AA^2\mathbf{x}_0 = A^3\mathbf{x}_0$, $\cdots$ だから，$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ である.

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

A を (n,n)-行列とするとき，AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n,n)-行列となる（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）．
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くことにする．

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の行列は，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

で，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ となるのだった．
$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = AA\mathbf{x}_0 = A^2\mathbf{x}_0$,
$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = AA^2\mathbf{x}_0 = A^3\mathbf{x}_0$, $\cdots$ だから，$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ である．

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

A を (n,n)-行列とするとき，AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n,n)-行列となる（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）．
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くことにする．

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の行列は，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

で，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ となるのだった．
$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = AA\mathbf{x}_0 = A^2\mathbf{x}_0$,
$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = AA^2\mathbf{x}_0 = A^3\mathbf{x}_0$, $\cdots$ だから，$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ である．

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

A を (n,n)-行列とするとき，AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n,n)-行列となる（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）.
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くことにする.

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の行列は，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

で，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ となるのだった.
$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = AA\mathbf{x}_0 = A^2\mathbf{x}_0$,
$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = AA^2\mathbf{x}_0 = A^3\mathbf{x}_0$, $\cdots$ だから，$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ である.

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

A を (n, n)-行列とするとき，AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n, n)-行列となる（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）．
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くことにする．

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の行列は，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

で，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ となるのだった．
$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = AA\mathbf{x}_0 = A^2\mathbf{x}_0$,
$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = AA^2\mathbf{x}_0 = A^3\mathbf{x}_0$, $\cdots$ だから，$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ である．

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

k を大きくしたときの $\mathbf{x}_k$ の状況（例えば，これがゼロ・ベクトル $\mathbf{0}$ に近づくかどうか）を調べるには，k を大きくしたとき

$$A^k$$

が何になるかが分かればよい．

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

k を大きくしたときの $\mathbf{x}_k$ の状況（例えば，これがゼロ・ベクトル $\mathbf{0}$ に近づくかどうか）を調べるには，k を大きくしたとき

$$A^k$$

が何になるかが分かればよい．

単位行列と逆行列

A を (n,n)-行列とするとき，AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n,n)-行列となる（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）．
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くのだった．

また，$A^1 = A$, $A^0 = E$ とする．ただし，E で左上から右下への対角線上に 1 が並び，その他の成分はすべて 0 であるような (n,n)-行列をあらわす．つまり，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E を 単位行列 とよぶ．単位行列は，数のかけ算での 1 と同じような性質を持っている：すべての (n,n)-行列 A に対し，$AE = EA = A$ である．

単位行列と逆行列

A を (n,n)-行列とするとき，AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n,n)-行列となる
（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）．
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くのだった．

また，$A^1 = A$, $A^0 = E$ とする．ただし，E で左上から右下への対角線上に 1 が並び，その他の成分はすべて 0 であるような (n,n)-行列をあらわす．つまり，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E を 単位行列 とよぶ．単位行列は，数のかけ算での 1 と同じような性質を持っている：すべての (n,n)-行列 A に対し，
$AE = EA = A$ である．

単位行列と逆行列

A を (n, n)-行列とするとき，AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n, n)-行列となる
（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）．
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くのだった．

また，$A^1 = A$, $A^0 = E$ とする．ただし，E で左上から右下への対角線上に 1 が並び，その他の成分はすべて 0 であるような (n, n)-行列をあらわす．つまり，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E を単位行列とよぶ．単位行列は，数のかけ算での 1 と同じような性質を持っている：すべての (n, n)-行列 A に対し，
$AE = EA = A$ である．

単位行列と逆行列

A を (n, n)-行列とするとき，AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n, n)-行列となる
（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）．
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くのだった．

また，$A^1 = A$, $A^0 = E$ とする．ただし，E で左上から右下への対角線上に 1 が並び，その他の成分はすべて 0 であるような (n, n)-行列をあらわす．つまり，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E を単位行列とよぶ．単位行列は，数のかけ算での 1 と同じような性質を持っている: すべての (n, n)-行列 A に対し，$AE = EA = A$ である．

単位行列と逆行列

A を (n,n)-行列とするとき，AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n,n)-行列となる
（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）．
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くのだった．

また，$A^1 = A$, $A^0 = E$ とする．ただし，E で左上から右下への対角線上に 1 が並び，その他の成分はすべて 0 であるような (n,n)-行列をあらわす．つまり，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E を **単位行列** とよぶ．単位行列は，数のかけ算での 1 と同じような性質を持っている：すべての (n,n)-行列 A に対し，
$AE = EA = A$ である．

単位行列と逆行列 — 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

単位行列と逆行列 — 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

単位行列と逆行列 — 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

単位行列と逆行列

(n,n)-行列 A に対して，ある数の逆数に対応するような性質を持つ (n,n)-行列があるとき，それを A の 逆行列 とよび，A^{-1} であらわす．つまり，(n,n)-行列 A の 逆行列 A^{-1} とは，
AB = BA = E　となるような (n,n)-行列 B のことである．

これを次と比較せよ:
0 と異なる実数 a の 逆数 $\frac{1}{a}$ は，　$ab = 1$ となるような数 b のことである．数でとは異なり，ゼロ行列（成分がすべて 0 であるような行列）でない行列で逆行列を持たないものも存在する．

たとえば，
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
とすると
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
だから，$AB = E$ となるような B は存在しない．
逆行列を持つ行列のことを 正則行列 とよぶ．

単位行列と逆行列

(n,n)-行列 A に対して，ある数の逆数に対応するような性質を持つ (n,n)-行列があるとき，それを A の 逆行列 とよび，A^{-1} であらわす．つまり，(n,n)-行列 A の 逆行列 A^{-1} とは，
$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$　となるような (n,n)-行列 B のことである．

これを次と比較せよ:
0 と異なる実数 a の 逆数 $\frac{1}{a}$ は， $ab = 1$ となるような数 b のことである．数でとは異なり，ゼロ行列（成分がすべて 0 であるような行列）でない行列で逆行列を持たないものも存在する．

たとえば，
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから，$AB = E$ となるような B は存在しない．
逆行列を持つ行列のことを 正則行列 とよぶ．

単位行列と逆行列

(n, n)-行列 A に対して，ある数の逆数に対応するような性質を持つ (n, n)-行列があるとき，それを A の **逆行列** とよび，A^{-1} であらわす．つまり，(n, n)-行列 A の **逆行列** A^{-1} とは，
$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$ となるような (n, n)-行列 B のことである．

これを次と比較せよ:
0 と異なる実数 a の 逆数 $\frac{1}{a}$ は，$ab = 1$ となるような数 b のことである．数でとは異なり，ゼロ行列（成分がすべて 0 であるような行列）でない行列で逆行列を持たないものも存在する．

たとえば，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{とすると}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから，$AB = E$ となるような B は存在しない．
逆行列を持つ行列のことを 正則行列 とよぶ．

単位行列と逆行列

(n,n)-行列 A に対して，ある数の逆数に対応するような性質を持つ (n,n)-行列があるとき，それを A の **逆行列** とよび，A^{-1} であらわす．つまり，(n,n)-行列 A の **逆行列** A^{-1} とは，
$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$　となるような (n,n)-行列 B のことである．

これを次と比較せよ:
0 と異なる実数 a の **逆数** $\frac{1}{a}$ は，　$ab = 1$ となるような数 b のことである．数でとは異なり，ゼロ行列（成分がすべて 0 であるような行列）でない行列で逆行列を持たないものも存在する．

たとえば，
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
とすると
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
だから，$AB = E$ となるような B は存在しない．
逆行列を持つ行列のことを **正則行列** とよぶ．

単位行列と逆行列

(n,n)-行列 A に対して，ある数の逆数に対応するような性質を持つ (n,n)-行列があるとき，それを A の **逆行列** とよび，A^{-1} であらわす．つまり，(n,n)-行列 A の **逆行列** A^{-1} とは，
$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$　となるような (n,n)-行列 B のことである．

これを次と比較せよ:
0 と異なる実数 a の **逆数** $\frac{1}{a}$ は，　$ab = 1$ となるような数 b のことである．数でとは異なり，ゼロ行列（成分がすべて 0 であるような行列）でない行列で逆行列を持たないものも存在する．

たとえば，
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから，$AB = E$ となるような B は存在しない．
逆行列を持つ行列のことを **正則行列** とよぶ．

単位行列と逆行列

(n, n)-行列 A に対して，ある数の逆数に対応するような性質を持つ (n, n)-行列があるとき，それを A の **逆行列** とよび，A^{-1} であらわす．つまり，(n, n)-行列 A の **逆行列** A^{-1} とは，

$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$　となるような (n, n)-行列 B のことである．

これを次と比較せよ:

0 と異なる実数 a の **逆数** $\frac{1}{a}$ は，　$ab = 1$ となるような数 b のことである．数でとは異なり，ゼロ行列（成分がすべて 0 であるような行列）でない行列で逆行列を持たないものも存在する．

たとえば，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{とすると}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから，$AB = E$ となるような B は存在しない．

逆行列を持つ行列のことを **正則行列** とよぶ．

単位行列と逆行列

(n, n)-行列 A に対して，ある数の逆数に対応するような性質を持つ (n, n)-行列があるとき，それを A の 逆行列 とよび，A^{-1} であらわす．つまり，(n, n)-行列 A の 逆行列 A^{-1} とは，
$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$ となるような (n, n)-行列 B のことである．

これを次と比較せよ:
0 と異なる実数 a の 逆数 $\frac{1}{a}$ は，$ab = 1$ となるような数 b のことである．数でとは異なり，ゼロ行列（成分がすべて 0 であるような行列）でない行列で逆行列を持たないものも存在する．

たとえば，
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
とすると
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
だから，$AB = E$ となるような B は存在しない．
逆行列を持つ行列のことを 正則行列 とよぶ．

対角行列と行列の対角化

左上から右下への対角線上以外の成分がすべて 0 であるような (n, n)-行列を**対角行列** という．単位行列 E や，前ページの例での A は対角行列である．

対角行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

とあらわしたとき，

$$A^2 = \begin{pmatrix} (a_{1,1})^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_{2,2})^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (a_{n,n})^2 \end{pmatrix}$$

対角行列と行列の対角化

左上から右下への対角線上以外の成分がすべて 0 であるような (n,n)-行列を**対角行列**という．単位行列 E や，前ページの例での A は対角行列である．

対角行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

とあらわしたとき，

$$A^2 = \begin{pmatrix} (a_{1,1})^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_{2,2})^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (a_{n,n})^2 \end{pmatrix}$$

対角行列と行列の対角化

左上から右下への対角線上以外の成分がすべて 0 であるような (n, n)-行列を**対角行列**という．単位行列 E や，前ページの例での A は対角行列である．

対角行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

とあらわしたとき，

$$A^2 = \begin{pmatrix} (a_{1,1})^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_{2,2})^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (a_{n,n})^2 \end{pmatrix}$$

対角行列と行列の対角化

左上から右下への対角線上以外の成分がすべて 0 であるような (n, n)-行列を**対角行列** という．単位行列 E や，前ページの例での A は対角行列である．

対角行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

とあらわしたとき，

$$A^2 = \begin{pmatrix} (a_{1,1})^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_{2,2})^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (a_{n,n})^2 \end{pmatrix}$$

対角行列と行列の対角化

同様に，

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

として，すべての $k \geq 0$ に対し，

$$A^k = \begin{pmatrix} (a_{1,1})^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_{2,2})^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (a_{n,n})^k \end{pmatrix}$$

となる．

以上の準備をすると，$A^k x_0$，$k = 1, 2, 3, \ldots$ で k を大きくするときの状況の，次のような分析が可能になる．

対角行列と行列の対角化

同様に，

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

として，すべての $k \geq 0$ に対し，

$$A^k = \begin{pmatrix} (a_{1,1})^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_{2,2})^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (a_{n,n})^k \end{pmatrix}$$

となる．

以上の準備をすると，$A^k x_0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ で k を大きくするときの状況の，次のような分析が可能になる．

対角行列と行列の対角化

同様に，

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

として，すべての $k \geq 0$ に対し，

$$A^k = \begin{pmatrix} (a_{1,1})^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_{2,2})^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (a_{n,n})^k \end{pmatrix}$$

となる．

以上の準備をすると，$A^k \mathbf{x}_0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ で k を大きくするときの状況の，次のような分析が可能になる．

対角行列と行列の対角化

以上の準備をすると，$A^k\mathbf{x}_0$, $k=1,2,3,\ldots$ で k を大きくするときの状況の，次のような分析が可能になる．ある対角行列 B と，正則行列 U によって $A=U^{-1}BU$ とあらわせたとすると，

$$A^k=(U^{-1}BU)^k=U^{-1}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}\cdots BU=U^{-1}B^kU$$

である．

$$B=\begin{pmatrix} \mathbf{b_{1,1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{b_{2,2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \mathbf{b_{n,n}} \end{pmatrix}$$

とすると，

$$A^k = U^{-1}B^kU = U^{-1}\begin{pmatrix} (\mathbf{b_{1,1}})^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\mathbf{b_{2,2}})^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (\mathbf{b_{n,n}})^k \end{pmatrix}U$$

対角行列と行列の対角化

以上の準備をすると，$A^k\mathbf{x}_0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ で k を大きくするときの状況の，次のような分析が可能になる．ある対角行列 B と，正則行列 U によって $A = U^{-1}BU$ とあらわせたとすると，
$A^k = (U^{-1}BU)^k = U^{-1}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}\cdots BU = U^{-1}B^kU$ である．

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{b_{1,1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{b_{2,2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \mathbf{b_{n,n}} \end{pmatrix}$$

とすると，

$$A^k = U^{-1}B^kU = U^{-1}\begin{pmatrix} (\mathbf{b_{1,1}})^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\mathbf{b_{2,2}})^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (\mathbf{b_{n,n}})^k \end{pmatrix}U$$

対角行列と行列の対角化

以上の準備をすると，$A^k\mathbf{x}_0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ で k を大きくするときの状況の，次のような分析が可能になる．ある対角行列 B と，正則行列 U によって $A = U^{-1}BU$ とあらわせたとすると，

$$A^k = (U^{-1}BU)^k = U^{-1}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}\cdots BU = U^{-1}B^kU$$ である．

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{b_{1,1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{b_{2,2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \mathbf{b_{n,n}} \end{pmatrix}$$

とすると，

$$A^k = U^{-1}B^kU = U^{-1}\begin{pmatrix} (\mathbf{b_{1,1}})^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\mathbf{b_{2,2}})^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (\mathbf{b_{n,n}})^k \end{pmatrix}U$$

対角行列と行列の対角化

以上の準備をすると，$A^k\mathbf{x}_0$, $k=1,2,3,\ldots$ で k を大きくするとときの状況の，次のような分析が可能になる．ある対角行列 B と，正則行列 U によって $A=U^{-1}BU$ とあらわせたとすると，
$A^k=(U^{-1}BU)^k=U^{-1}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}\cdots BU=U^{-1}B^kU$ である．

$$B=\begin{pmatrix} \mathbf{b_{1,1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{b_{2,2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \mathbf{b_{n,n}} \end{pmatrix}$$

とすると，

$$A^k = U^{-1}B^kU = U^{-1}\begin{pmatrix} (\mathbf{b_{1,1}})^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\mathbf{b_{2,2}})^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (\mathbf{b_{n,n}})^k \end{pmatrix}U$$

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の仕方をあらわす行列を，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

と書く． $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$ である．
上の A は，正則行列 U をうまく選ぶと，

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$$

とあらわせる．しかもこのとき， $|c_{1,1}|, |c_{2,2,}|, |c_{3,3}| < 1$ となることが確かめられる．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の仕方をあらわす行列を,

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

と書く. $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$ である.
上の A は, 正則行列 U をうまく選ぶと,

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$$

とあらわせる. しかもこのとき, $|c_{1,1}|, |c_{2,2}|, |c_{3,3}| < 1$ となることが確かめられる.

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の仕方をあらわす行列を，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

と書く． $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$ である．

上の A は，正則行列 U をうまく選ぶと，

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$$

とあらわせる．しかもこのとき，$|c_{1,1}|, |c_{2,2}|, |c_{3,3}| < 1$ となることが確かめられる．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の仕方をあらわす行列を，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

と書く． $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$ である．
上の A は，正則行列 U をうまく選ぶと，

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$$

とあらわせる．しかもこのとき，$|c_{1,1}|, |c_{2,2}|, |c_{3,3}| < 1$ となることが確かめられる．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の仕方をあらわす行列を，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

と書く． $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$ である．
上の A は，正則行列 U をうまく選ぶと，

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$$

とあらわせる．しかもこのとき，$|c_{1,1}|, |c_{2,2,}|, |c_{3,3}| < 1$ となることが確かめられる．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

したがって,

$$\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 = U^{-1} \begin{pmatrix} (c_{1,1})^k & 0 & 0 \\ 0 & (c_{2,2})^k & 0 \\ 0 & 0 & (c_{3,3})^k \end{pmatrix} U\mathbf{x}_0$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} \quad U^{-1} O U \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \qquad \text{となる.}$$

ただし O はサイズが $(3,3)$ のゼロ行列（すべての要素が 0 となっている行列）で, $\mathbf{0}$ は 3 次元のゼロ・ベクトルである.

結論. 上のような北まだらフクロウの個体数の推移のモデルで, ある年から次の年への個体数の推移を表す行列が前ページの A のようなものとなっているときには, 時間（十分）に経過すると, この北まだらフクロウの集団は絶滅してしまうことが帰結される.

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

したがって,

$$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 = U^{-1}\begin{pmatrix} (c_{1,1})^k & 0 & 0 \\ 0 & (c_{2,2})^k & 0 \\ 0 & 0 & (c_{3,3})^k \end{pmatrix} U\mathbf{x}_0$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} \quad U^{-1}OU\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \quad \text{となる.}$$

ただし O はサイズが $(3,3)$ のゼロ行列（すべての要素が 0 となっている行列）で, $\mathbf{0}$ は 3 次元のゼロ・ベクトルである.

結論. 上のような北まだらフクロウの個体数の推移のモデルで, ある年から次の年への個体数の推移を表す行列が前ページの A のようなものとなっているときには, 時間（十分）に経過すると, この北まだらフクロウの集団は絶滅してしまうことが帰結される.

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

したがって，

$$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 = U^{-1}\begin{pmatrix} (c_{1,1})^k & 0 & 0 \\ 0 & (c_{2,2})^k & 0 \\ 0 & 0 & (c_{3,3})^k \end{pmatrix} U\mathbf{x}_0$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} \quad U^{-1}OU\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \qquad \text{となる.}$$

ただし O はサイズが $(3,3)$ のゼロ行列（すべての要素が 0 となっている行列）で，$\mathbf{0}$ は 3 次元のゼロ・ベクトルである.

結論． 上のような北まだらフクロウの個体数の推移のモデルで，ある年から次の年への個体数の推移を表す行列が前ページの A のようなものとなっているときには，時間（十分）に経過すると，この北まだらフクロウの集団は絶滅してしまうことが帰結される.

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

したがって，

$$\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 = U^{-1} \begin{pmatrix} (c_{1,1})^k & 0 & 0 \\ 0 & (c_{2,2})^k & 0 \\ 0 & 0 & (c_{3,3})^k \end{pmatrix} U\mathbf{x}_0$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} \quad U^{-1} O U \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$$ となる．

ただし O はサイズが $(3,3)$ のゼロ行列（すべての要素が 0 となっている行列）で，$\mathbf{0}$ は 3 次元のゼロ・ベクトルである．

結論． 上のような北まだらフクロウの個体数の推移のモデルで，ある年から次の年への個体数の推移を表す行列が前ページの A のようなものとなっているときには，時間（十分）に経過すると，この北まだらフクロウの集団は絶滅してしまうことが帰結される．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

ここで用いた“推移行列” A は，伐裁が進んで，ところどころに開けた場所のできた森林での状況を反映しているものだったが，伐裁されていない森林では，推移行列 A は，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ \mathbf{0.3} & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

とできるのだった（前回のスライドを参照）．この A を前と同じように $A = U^{-1}\begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$ と分解すると，$c_{1,1}$ $c_{2,2}$，$c_{3,3}$ のうちの一つは絶対値が 1 より大きくなることが確かめられる．したがって，このときには，どのような（ゼロベクトルと異なる） $\mathbf{x}_0$ から出発しても k を大きくしていったとき，$\mathbf{x}_k$ は $\mathbf{0}$ に近づいてはゆかない，つまりこのときには，北まだらフクロウの集団は絶滅しない．

以上の考察から，アメリカの大平洋岸ノースウエストでの北まだらフクロウが絶滅するか否かは森林の伐裁を進めるかどうかに依存していることが結論できる．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

ここで用いた“推移行列” A は，伐裁が進んで，ところどころに開けた場所のできた森林での状況を反映しているものだったが，伐裁されていない森林では，推移行列 A は，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

とできるのだった（前回のスライドを参照）．この A を前と同じように $A = U^{-1} \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$ と分解すると，$c_{1,1}$ $c_{2,2}$，$c_{3,3}$ のうちの一つは絶対値が 1 より大きくなることが確かめられる．したがって，このときには，どのような（ゼロベクトルと異なる） $\mathbf{x}_0$ から出発しても k を大きくしていったとき，$\mathbf{x}_k$ は $\mathbf{0}$ に近づいてはゆかない，つまりこのときには，北まだらフクロウの集団は絶滅しない．

以上の考察から，アメリカの大平洋岸ノースウエストでの北まだらフクロウが絶滅するか否かは森林の伐裁を進めるかどうかに依存していることが結論できる．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

ここで用いた“推移行列” A は，伐裁が進んで，ところどころに開けた場所のできた森林での状況を反映しているものだったが，伐裁されていない森林では，推移行列 A は，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ \mathbf{0.3} & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

とできるのだった（前回のスライドを参照）．この A を前と同じように $A = U^{-1} \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$

と分解すると，$c_{1,1}$ $c_{2,2}$，$c_{3,3}$ のうちの一つは絶対値が 1 より大きくなることが確かめられる．したがって，このときには，どのような（ゼロベクトルと異なる） x_0 から出発しても k を大きくしていったとき，x_k は $\mathbf{0}$ に近づいてはゆかない，つまりこのときには，北まだらフクロウの集団は絶滅しない．

以上の考察から，アメリカの大平洋岸ノースウエストでの北まだらフクロウが絶滅するか否かは森林の伐裁を進めるかどうかに依存していることが結論できる．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

ここで用いた“推移行列” A は，伐裁が進んで，ところどころに開けた場所のできた森林での状況を反映しているものだったが，伐裁されていない森林では，推移行列 A は，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ \mathbf{0.3} & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

とできるのだった（前回のスライドを参照）．この A を前と同じように $A = U^{-1}\begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$ と分解すると，$c_{1,1}$ $c_{2,2}$，$c_{3,3}$ のうちの一つは絶対値が 1 より大きくなることが確かめられる．したがって，このときには，どのような（ゼロベクトルと異なる） $\mathbf{x}_0$ から出発しても k を大きくしていったとき，$\mathbf{x}_k$ は $\mathbf{0}$ に近づいてはゆかない，つまりこのときには，北まだらフクロウの集団は絶滅しない．

以上の考察から，アメリカの大平洋岸ノースウエストでの北まだらフクロウが絶滅するか否かは森林の伐裁を進めるかどうかに依存していることが結論できる．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

ここで用いた“推移行列” A は，伐裁が進んで，ところどころに開けた場所のできた森林での状況を反映しているものだったが，伐裁されていない森林では，推移行列 A は，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ \mathbf{0.3} & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

とできるのだった（前回のスライドを参照）．この A を前と同じように $A = U^{-1}\begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$

と分解すると，$c_{1,1}$ $c_{2,2}$，$c_{3,3}$ のうちの一つは絶対値が 1 より大きくなることが確かめられる．したがって，このときには，どのような（ゼロベクトルと異なる） $\mathbf{x}_0$ から出発しても k を大きくしていったとき，$\mathbf{x}_k$ は $\mathbf{0}$ に近づいてはゆかない，つまりこのときには，北まだらフクロウの集団は絶滅しない．

以上の考察から，アメリカの大平洋岸ノースウエストでの北まだらフクロウが絶滅するか否かは森林の伐裁を進めるかどうかに依存していることが結論できる．

終