数 理 科 学

2008 年秋学期@中部大学

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp
http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

2008 年 11 月 20 日（第 9 回目）の講義 (November 27, 2008 (07:13) 版)

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

前回の講義に黒板で説明したことを，再度スライドで確認します．

まず，行列の積を復習して,「北まだらふくろう」の例でこれがどう使われていたのかを復習します．

前回の講義に黒板で説明したことを，再度スライドで確認します.

まず，行列の積を復習して,「北まだらふくろう」の例でこれがどう使われていたのかを復習します.

行列と行列の積

A を $(\ell, \mathbf{m})$-行列，B を $(\mathbf{m}, n)$-行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell,1} & a_{\ell,2} & \cdots & a_{\ell,m} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

として，A と B の積 AB を，次のような (ℓ, n)-行列とする:

$$AB = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{\ell,1} & c_{\ell,2} & \cdots & c_{\ell,n} \end{pmatrix}$$

ただし，$1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq n$ に対し，

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \cdots + a_{i,m} b_{m,j}$$

行列と行列の積

A を $(\ell, \mathbf{m})$-行列， B を $(\mathbf{m}, n)$-行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell,1} & a_{\ell,2} & \cdots & a_{\ell,m} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

として， A と B の積 AB を，次のような (ℓ, n)-行列とする:

$$AB = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{\ell,1} & c_{\ell,2} & \cdots & c_{\ell,n} \end{pmatrix}$$

ただし， $1 \le i \le \ell$, $1 \le j \le n$ に対し，

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \cdots + a_{i,m} b_{m,j}$$

行列と行列の積

A を $(\ell, \mathbf{m})$-行列， B を $(\mathbf{m}, n)$-行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell,1} & a_{\ell,2} & \cdots & a_{\ell,m} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

として， A と B の積 AB を，次のような (ℓ, n)-行列とする:

$$AB = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{\ell,1} & c_{\ell,2} & \cdots & c_{\ell,n} \end{pmatrix}$$

ただし， $1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq n$ に対し，

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \cdots + a_{i,m} b_{m,j}$$

行列と行列の積

A を $(\ell, \mathbf{m})$-行列，B を $(\mathbf{m}, n)$-行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell,1} & a_{\ell,2} & \cdots & a_{\ell,m} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

として，A と B の積 AB を，次のような (ℓ, n)-行列とする:

$$AB = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{\ell,1} & c_{\ell,2} & \cdots & c_{\ell,n} \end{pmatrix}$$

ただし，$1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq n$ に対し，

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \cdots + a_{i,m} b_{m,j}$$

行列と行列の積

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell,1} & a_{\ell,2} & \cdots & a_{\ell,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,j} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & c_{i,j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

ただし，$1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq n$ に対し，

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \cdots + a_{i,m} b_{m,j}$$

行列と行列の積

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell,1} & a_{\ell,2} & \cdots & a_{\ell,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,j} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & c_{i,j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

ただし，$1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq n$ に対し，

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \cdots + a_{i,m} b_{m,j}$$

行列の積の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とするとき，

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -27 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

行列の積の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とするとき，

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -27 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

行列の積の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とするとき,

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -27 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

注意

(1) n-次元ベクトルは，$(n,1)$-行列と見ることもできる．

こう見たとき，前に定義した (m,n)-行列と n-次元ベクトルの積は，今定義した行列と行列の積の意味での (m,n)-行列と $(n,1)$-行列の積と一致する．

例．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -27 \end{pmatrix}$$

注意

(1) n-次元ベクトルは，$(n, 1)$-行列と見ることもできる．

こう見たとき，前に定義した (m, n)-行列と n-次元ベクトルの積は，今定義した行列と行列の積の意味での (m, n)-行列と $(n, 1)$-行列の積と一致する．

例．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -27 \end{pmatrix}$$

注意

(1) n-次元ベクトルは，$(n, 1)$-行列と見ることもできる．

こう見たとき，前に定義した (m, n)-行列と n-次元ベクトルの積は，今定義した行列と行列の積の意味での (m, n)-行列と $(n, 1)$-行列の積と一致する．

例．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -27 \end{pmatrix}$$

注意

(1) n-次元ベクトルは，$(n,1)$-行列と見ることもできる.

こう見たとき，前に定義した (m,n)-行列と n-次元ベクトルの積は，今定義した行列と行列の積の意味での (m,n)-行列と $(n,1)$-行列の積と一致する.

例.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -27 \end{pmatrix}$$

注意

(1) n-次元ベクトルは，$(n,1)$-行列と見ることもできる．

こう見たとき，前に定義した (m,n)-行列と n-次元ベクトルの積は，今定義した行列と行列の積の意味での (m,n)-行列と $(n,1)$-行列の積と一致する．

例．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -27 \end{pmatrix}$$

注意

(2) A を (ℓ, m)-行列， B を (m, n)-行列， C を (n, o)-行列とするとき， $A(BC)$ や $(AB)C$ が定義できる．

BC は (m, o)-行列だから， $A(BC)$ は (ℓ, o)-行列で， AB は (ℓ, n)-行列だから， $(AB)C$ も (ℓ, o)-行列である．

このとき $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ．

(行列の積の定義に従って計算して， $A(BC)$ と $(AB)C$ の各成分が等しくなることを見るとで示せる．)

このような性質が成り立つことを,「行列の積は 結合法則 を満たす」と表現する．

結合法則により， $A(BC)$ と $(AB)C$ は等しくなるから， これを略して ABC とあらわすことにする．

注意

(2) A を (ℓ, m)-行列， B を (m, n)-行列， C を (n, o)-行列とするとき， $A(BC)$ や $(AB)C$ が定義できる．

BC は (m, o)-行列だから， $A(BC)$ は (ℓ, o)-行列で， AB は (ℓ, n)-行列だから， $(AB)C$ も (ℓ, o)-行列である．

このとき $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ．

(行列の積の定義に従って計算して， $A(BC)$ と $(AB)C$ の各成分が等しくなることを見るとで示せる．)

このような性質が成り立つことを,「行列の積は 結合法則 を満たす」と表現する．

結合法則により， $A(BC)$ と $(AB)C$ は等しくなるから， これを略して ABC とあらわすことにする．

注意

(2) A を (ℓ, m)-行列，　B を (m, n)-行列，　C を (n, o)-行列とするとき，$A(BC)$ や $(AB)C$ が定義できる．

BC は (m, o)-行列だから，$A(BC)$ は (ℓ, o)-行列で，AB は (ℓ, n)-行列だから，$(AB)C$ も (ℓ, o)-行列である．

このとき $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ．

(行列の積の定義に従って計算して，$A(BC)$ と $(AB)C$ の各成分が等しくなることを見るとで示せる．　)

このような性質が成り立つことを，「行列の積は 結合法則 を満たす」と表現する．

結合法則により，$A(BC)$ と $(AB)C$ は等しくなるから，これを略して ABC とあらわすことにする．

注意

(2) A を (ℓ, m)-行列， B を (m, n)-行列， C を (n, o)-行列とするとき， $A(BC)$ や $(AB)C$ が定義できる．

BC は (m, o)-行列だから， $A(BC)$ は (ℓ, o)-行列で， AB は (ℓ, n)-行列だから， $(AB)C$ も (ℓ, o)-行列である．

このとき $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ．

(行列の積の定義に従って計算して， $A(BC)$ と $(AB)C$ の各成分が等しくなることを見るとで示せる．)

このような性質が成り立つことを,「行列の積は 結合法則 を満たす」と表現する．

結合法則により， $A(BC)$ と $(AB)C$ は等しくなるから， これを略して ABC とあらわすことにする．

注意

(2) A を (ℓ, m)-行列， B を (m, n)-行列， C を (n, o)-行列とするとき，$A(BC)$ や $(AB)C$ が定義できる.

BC は (m, o)-行列だから，$A(BC)$ は (ℓ, o)-行列で，AB は (ℓ, n)-行列だから，$(AB)C$ も (ℓ, o)-行列である.

このとき $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ.

(行列の積の定義に従って計算して，$A(BC)$ と $(AB)C$ の各成分が等しくなることを見るとで示せる.)

このような性質が成り立つことを,「行列の積は 結合法則 を満たす」と表現する.

結合法則により，$A(BC)$ と $(AB)C$ は等しくなるから，これを略して ABC とあらわすことにする.

注意

(2) A を (ℓ, m)-行列， B を (m, n)-行列， C を (n, o)-行列とするとき， $A(BC)$ や $(AB)C$ が定義できる．

BC は (m, o)-行列だから， $A(BC)$ は (ℓ, o)-行列で， AB は (ℓ, n)-行列だから， $(AB)C$ も (ℓ, o)-行列である．

このとき $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ．

(行列の積の定義に従って計算して， $A(BC)$ と $(AB)C$ の各成分が等しくなることを見るとで示せる．)

このような性質が成り立つことを,「行列の積は **結合法則** を満たす」と表現する．

結合法則により， $A(BC)$ と $(AB)C$ は等しくなるから， これを略して ABC とあらわすことにする．

注意

(2) A を (ℓ, m)-行列， B を (m, n)-行列， C を (n, o)-行列とするとき， $A(BC)$ や $(AB)C$ が定義できる．

BC は (m, o)-行列だから， $A(BC)$ は (ℓ, o)-行列で， AB は (ℓ, n)-行列だから， $(AB)C$ も (ℓ, o)-行列である．

このとき $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ．

(行列の積の定義に従って計算して， $A(BC)$ と $(AB)C$ の各成分が等しくなることを見るとで示せる．)

このような性質が成り立つことを,「行列の積は 結合法則 を満たす」と表現する．

結合法則により， $A(BC)$ と $(AB)C$ は等しくなるから， これを略して ABC とあらわすことにする．

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

A を (n, n)-行列とするとき，AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n, n)-行列となる（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）．
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くことにする．

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の行列は，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

で，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ となるのだった．
$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = AA\mathbf{x}_0 = A^2\mathbf{x}_0$,
$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = AA^2\mathbf{x}_0 = A^3\mathbf{x}_0$, $\cdots$ だから，$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ である．

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

A を (n,n)-行列とするとき，AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n,n)-行列となる（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）.
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くことにする.

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の行列は，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

で，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ となるのだった.
$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = AA\mathbf{x}_0 = A^2\mathbf{x}_0$,
$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = AA^2\mathbf{x}_0 = A^3\mathbf{x}_0$, $\cdots$ だから，$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ である.

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

A を (n, n)-行列とするとき，AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n, n)-行列となる（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）．
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くことにする．

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の行列は，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

で，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ となるのだった．
$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = AA\mathbf{x}_0 = A^2\mathbf{x}_0$,
$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = AA^2\mathbf{x}_0 = A^3\mathbf{x}_0$, $\cdots$ だから，$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ である．

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

A を (n,n)-行列とするとき， AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n,n)-行列となる（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）．
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くことにする．

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の行列は，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

で， $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ となるのだった．
$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = AA\mathbf{x}_0 = A^2\mathbf{x}_0$,
$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = AA^2\mathbf{x}_0 = A^3\mathbf{x}_0$, $\cdots$ だから， $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ である．

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

A を (n, n)-行列とするとき， AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n, n)-行列となる（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）.
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くことにする.

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の行列は，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

で， $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ となるのだった.
$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = AA\mathbf{x}_0 = A^2\mathbf{x}_0$,
$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = AA^2\mathbf{x}_0 = A^3\mathbf{x}_0$, $\cdots$ だから， $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ である.

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

A を (n,n)-行列とするとき，AA, AAA, $AAAA$, $\cdots$, はふたたび (n,n)-行列となる（結合法則により括弧をはぶいていることに注意）．
これらを，それぞれ A^2, A^3, A^4, $\cdots$, と書くことにする．

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の行列は，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

で，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ となるのだった．
$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = AA\mathbf{x}_0 = A^2\mathbf{x}_0$,
$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = AA^2\mathbf{x}_0 = A^3\mathbf{x}_0$, $\cdots$ だから，$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ である．

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

k を大きくしたときの $\mathbf{x}_k$ の状況（例えば，これがゼロ・ベクトル $\mathbf{0}$ に近づくかどうか）を調べるには，k を大きくしたとき

$$A^k$$

が何になるかが分かればよい．

北まだらフクロウの個体数の推移のモデルへの応用

k を大きくしたときの $\mathbf{x}_k$ の状況（例えば，これがゼロ・ベクトル $\mathbf{0}$ に近づくかどうか）を調べるには，k を大きくしたとき

$$A^k$$

が何になるかが分かればよい．

単位行列と逆行列

E で左上から右下への対角線上に 1 が並び，その他の成分はすべて 0 であるような (n,n)-行列をあらわす．つまり，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E を 単位行列 とよぶ．単位行列は，数のかけ算での 1 と同じような性質を持っている：すべての (n,n)-行列 A に対し，
$AE = EA = A$ である．

文字 E はドイツ語の Einheit (単位) からきている．英語圏では，identity の頭文字から I を用いることも多い．

単位行列と逆行列

E で左上から右下への対角線上に 1 が並び，その他の成分はすべて 0 であるような (n, n)-行列をあらわす．つまり，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E を 単位行列 とよぶ．単位行列は，数のかけ算での 1 と同じような性質を持っている：すべての (n, n)-行列 A に対し，
$AE = EA = A$ である．

文字 E はドイツ語の Einheit (単位) からきている．英語圏では，identity の頭文字から I を用いることも多い．

単位行列と逆行列

E で左上から右下への対角線上に 1 が並び，その他の成分はすべて 0 であるような (n,n)-行列をあらわす．つまり，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E を 単位行列 とよぶ．単位行列は，数のかけ算での 1 と同じような性質を持っている：すべての (n,n)-行列 A に対し，$AE = EA = A$ である．

文字 E はドイツ語の Einheit (単位) からきている．英語圏では，identity の頭文字から I を用いることも多い．

単位行列と逆行列

E で左上から右下への対角線上に 1 が並び，その他の成分はすべて 0 であるような (n,n)-行列をあらわす．つまり，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E を 単位行列 とよぶ．単位行列は，数のかけ算での 1 と同じような性質を持っている：すべての (n,n)-行列 A に対し，$AE = EA = A$ である．

文字 E はドイツ語の Einheit (単位) からきている．英語圏では，identity の頭文字から I を用いることも多い．

単位行列と逆行列

E で左上から右下への対角線上に 1 が並び，その他の成分はすべて 0 であるような (n,n)-行列をあらわす．つまり，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E を 単位行列 とよぶ．単位行列は，数のかけ算での 1 と同じような性質を持っている: すべての (n,n)-行列 A に対し，
$AE = EA = A$ である．

文字 E はドイツ語の Einheit (単位) からきている．英語圏では，identity の頭文字から I を用いることも多い．

単位行列と逆行列 — 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

単位行列と逆行列 — 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

単位行列と逆行列 — 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

単位行列と逆行列

(n,n)-行列 A に対して，ある数の逆数に対応するような性質を持つ (n,n)-行列があるとき，それを A の **逆行列** とよび，A^{-1} であらわす．つまり，(n,n)-行列 A の **逆行列** A^{-1} とは，
$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$　となるような (n,n)-行列 B のことである．

これを次と比較せよ:
0 と異なる実数 a の 逆数 $\frac{1}{a}$ は，$ab = 1$ となるような数 b のことである．数でとは異なり，ゼロ行列（成分がすべて 0 であるような行列）でない行列で逆行列を持たないものも存在する．

たとえば，
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから，$AB = E$ となるような B は存在しない．

逆行列を持つ行列のことを **正則行列** とよぶ．

単位行列と逆行列

(n, n)-行列 A に対して，ある数の逆数に対応するような性質を持つ (n, n)-行列があるとき，それを A の **逆行列** とよび，A^{-1} であらわす．つまり，(n, n)-行列 A の **逆行列** A^{-1} とは，

$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$　となるような (n, n)-行列 B のことである．

これを次と比較せよ:

0 と異なる実数 a の **逆数** $\frac{1}{a}$ は，　$ab = 1$ となるような数 b のことである．数でとは異なり，ゼロ行列（成分がすべて 0 であるような行列）でない行列で逆行列を持たないものも存在する．

たとえば，
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから，$AB = E$ となるような B は存在しない．

逆行列を持つ行列のことを **正則行列** とよぶ．

単位行列と逆行列

(n,n)-行列 A に対して，ある数の逆数に対応するような性質を持つ (n,n)-行列があるとき，それを A の **逆行列** とよび，A^{-1} であらわす．つまり，(n,n)-行列 A の **逆行列** A^{-1} とは，
$\mathbf{AB = BA = E}$　となるような (n,n)-行列 B のことである．

これを次と比較せよ:
0 と異なる実数 a の 逆数 $\frac{1}{a}$ は，　$ab=1$ となるような数 b のことである．数でとは異なり，ゼロ行列（成分がすべて 0 であるような行列）でない行列で逆行列を持たないものも存在する．

たとえば，
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから，$AB=E$ となるような B は存在しない．

逆行列を持つ行列のことを 正則行列 とよぶ．

単位行列と逆行列

(n,n)-行列 A に対して，ある数の逆数に対応するような性質を持つ (n,n)-行列があるとき，それを A の **逆行列** とよび，A^{-1} であらわす．つまり，(n,n)-行列 A の **逆行列** A^{-1} とは，
$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$　となるような (n,n)-行列 B のことである．

これを次と比較せよ:
0 と異なる実数 a の **逆数** $\frac{1}{a}$ は，　$ab=1$ となるような数 b のことである．数でとは異なり，ゼロ行列（成分がすべて 0 であるような行列）でない行列で逆行列を持たないものも存在する．

たとえば，
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ とすると
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{1,1}&b_{1,2}&b_{1,3}\\b_{2,1}&b_{2,2}&b_{2,3}\\b_{3,1}&b_{3,2}&b_{3,3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{1,1}&b_{1,2}&b_{1,3}\\b_{2,1}&b_{2,2}&b_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$$
だから，$AB=E$ となるような B は存在しない．

逆行列を持つ行列のことを **正則行列** とよぶ．

単位行列と逆行列

(n,n)-行列 A に対して，ある数の逆数に対応するような性質を持つ (n,n)-行列があるとき，それを A の **逆行列** とよび，A^{-1} であらわす．つまり，(n,n)-行列 A の **逆行列** A^{-1} とは，
$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$ となるような (n,n)-行列 B のことである．

これを次と比較せよ:
0 と異なる実数 a の **逆数** $\frac{1}{a}$ は，$ab = 1$ となるような数 b のことである．数でとは異なり，ゼロ行列（成分がすべて 0 であるような行列）でない行列で逆行列を持たないものも存在する．

たとえば，
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから，$AB = E$ となるような B は存在しない．

逆行列を持つ行列のことを **正則行列** とよぶ．

単位行列と逆行列

(n,n)-行列 A に対して，ある数の逆数に対応するような性質を持つ (n,n)-行列があるとき，それを A の 逆行列 とよび，A^{-1} であらわす．つまり，(n,n)-行列 A の 逆行列 A^{-1} とは，
$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$ となるような (n,n)-行列 B のことである．

これを次と比較せよ:
0 と異なる実数 a の 逆数 $\frac{1}{a}$ は，$ab=1$ となるような数 b のことである．数でとは異なり，ゼロ行列（成分がすべて 0 であるような行列）でない行列で逆行列を持たないものも存在する．

たとえば，
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
とすると

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{1,1}&b_{1,2}&b_{1,3}\\b_{2,1}&b_{2,2}&b_{2,3}\\b_{3,1}&b_{3,2}&b_{3,3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{1,1}&b_{1,2}&b_{1,3}\\b_{2,1}&b_{2,2}&b_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

だから，$AB=E$ となるような B は存在しない．

逆行列を持つ行列のことを 正則行列 とよぶ．

単位行列と逆行列

(n,n)-行列 A に対して，ある数の逆数に対応するような性質を持つ (n,n)-行列があるとき，それを A の 逆行列 とよび，A^{-1} であらわす．つまり，(n,n)-行列 A の 逆行列 A^{-1} とは，
$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$　となるような (n,n)-行列 B のことである．

これを次と比較せよ:
0 と異なる実数 a の 逆数 $\frac{1}{a}$ は，　$ab = 1$ となるような数 b のことである．数でとは異なり，ゼロ行列（成分がすべて 0 であるような行列）でない行列で逆行列を持たないものも存在する．

たとえば，
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから，$AB = E$ となるような B は存在しない．

逆行列を持つ行列のことを 正則行列 とよぶ．

左上から右下への対角線上以外の成分がすべて 0 であるような (n, n)-行列を**対角行列**という．単位行列 E や，前ページの例での A は対角行列である．

(n, n)-行列 A, B が両方とも対角行列で

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

という形をしているとき，

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2}b_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n}b_{n,n} \end{pmatrix}$$

となる．

左上から右下への対角線上以外の成分がすべて 0 であるような (n,n)-行列を**対角行列** という．単位行列 E や，前ページの例での A は対角行列である．

(n,n)-行列 A, B が両方とも対角行列で

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

という形をしているとき，

$$AB=\begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2}b_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n}b_{n,n} \end{pmatrix}$$

となる．

左上から右下への対角線上以外の成分がすべて 0 であるような (n, n)-行列を対角行列 という．単位行列 E や，前ページの例での A は対角行列である．

(n, n)-行列 A, B が両方とも対角行列で

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

という形をしているとき，

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2}b_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n}b_{n,n} \end{pmatrix}$$

となる．

左上から右下への対角線上以外の成分がすべて 0 であるような (n,n)-行列を**対角行列** という．単位行列 E や，前ページの例での A は対角行列である．

(n,n)-行列 A, B が両方とも対角行列で

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

という形をしているとき，

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2}b_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n}b_{n,n} \end{pmatrix}$$

となる．

このことから，

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

とすると，すべての $k \geq 1$ に対し，

$$A^k = \begin{pmatrix} (a_{1,1})^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_{2,2})^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (a_{n,n})^k \end{pmatrix}$$

となる．

以上の準備をすると，$A^k \mathbf{x}_0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ で k を大きくするときの状況の，次のような分析が可能になる．

このことから，

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

とすると，すべての $k \geq 1$ に対し，

$$A^k = \begin{pmatrix} (a_{1,1})^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_{2,2})^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (a_{n,n})^k \end{pmatrix}$$

となる．

以上の準備をすると，$A^k \mathbf{x}_0$，$k = 1, 2, 3, \ldots$ で k を大きくするときの状況の，次のような分析が可能になる．

このことから，

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

とすると，すべての $k \geq 1$ に対し，

$$A^k = \begin{pmatrix} (a_{1,1})^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_{2,2})^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (a_{n,n})^k \end{pmatrix}$$

となる．

以上の準備をすると，$A^k\mathbf{x}_0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ で k を大きくするときの状況の，次のような分析が可能になる．

以上の準備をすると，$A^k\mathbf{x}_0$, $k=1,2,3,\ldots$ で k を大きくするときの状況の，次のような分析が可能になる．ある対角行列 B と，正則行列 U によって $A=U^{-1}BU$ とあらわせたとすると，
$A^k=(U^{-1}BU)^k=U^{-1}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}\cdots BU=U^{-1}B^kU$ である．

$$B=\begin{pmatrix} \mathbf{b_{1,1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{b_{2,2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \mathbf{b_{n,n}} \end{pmatrix}$$

とすると，

$$A^k = U^{-1}B^kU = U^{-1}\begin{pmatrix} (\mathbf{b_{1,1}})^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\mathbf{b_{2,2}})^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (\mathbf{b_{n,n}})^k \end{pmatrix}U$$

以上の準備をすると，$A^k\mathbf{x}_0$, $k=1,2,3,\ldots$ で k を大きくするときの状況の，次のような分析が可能になる．ある対角行列 B と，正則行列 U によって $A=U^{-1}BU$ とあらわせたとすると，

$$A^k=(U^{-1}BU)^k=U^{-1}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}\cdots BU=U^{-1}B^kU$$

である．

$$B=\begin{pmatrix} \mathbf{b_{1,1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{b_{2,2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \mathbf{b_{n,n}} \end{pmatrix}$$

とすると，

$$A^k = U^{-1}B^kU = U^{-1}\begin{pmatrix} (\mathbf{b_{1,1}})^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\mathbf{b_{2,2}})^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (\mathbf{b_{n,n}})^k \end{pmatrix}U$$

以上の準備をすると，$A^k\mathbf{x}_0$, $k=1,2,3,\ldots$ で k を大きくするときの状況の，次のような分析が可能になる．ある対角行列 B と，正則行列 U によって $A=U^{-1}BU$ とあらわせたとすると，$A^k=(U^{-1}BU)^k=U^{-1}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}\cdots BU=U^{-1}B^kU$ である．

$$B=\begin{pmatrix} \mathbf{b_{1,1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{b_{2,2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \mathbf{b_{n,n}} \end{pmatrix}$$

とすると，

$$A^k = U^{-1}B^kU = U^{-1}\begin{pmatrix} (\mathbf{b_{1,1}})^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\mathbf{b_{2,2}})^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (\mathbf{b_{n,n}})^k \end{pmatrix}U$$

以上の準備をすると，$A^k\mathbf{x}_0$, $k=1,2,3,\ldots$ で k を大きくするときの状況の，次のような分析が可能になる．ある対角行列 B と，正則行列 U によって $A=U^{-1}BU$ とあらわせたとすると，
$A^k=(U^{-1}BU)^k=U^{-1}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}B\underbrace{UU^{-1}}_{=E}\cdots BU=U^{-1}B^kU$ である．

$$B=\begin{pmatrix} \mathbf{b_{1,1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{b_{2,2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \mathbf{b_{n,n}} \end{pmatrix}$$

とすると，

$$A^k = U^{-1}B^kU = U^{-1}\begin{pmatrix} (\mathbf{b_{1,1}})^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\mathbf{b_{2,2}})^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & (\mathbf{b_{n,n}})^k \end{pmatrix}U$$

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の仕方をあらわす行列を,

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

と書く. $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$ である.
上の A は, 正則行列 U をうまく選ぶと,

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$$

とあらわせる. しかもこのとき, $|c_{1,1}|, |c_{2,2,}|, |c_{3,3}| < 1$ となることが確かめられる.

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の仕方をあらわす行列を，

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

と書く． $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$ である．
上の A は，正則行列 U をうまく選ぶと，

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$$

とあらわせる．しかもこのとき，$|c_{1,1}|, |c_{2,2}|, |c_{3,3}| < 1$ となることが確かめられる．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の仕方をあらわす行列を,

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

と書く. $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$ である.

上の A は, 正則行列 U をうまく選ぶと,

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$$

とあらわせる. しかもこのとき, $|c_{1,1}|, |c_{2,2,}|, |c_{3,3}| < 1$ となることが確かめられる.

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の仕方をあらわす行列を,

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

と書く. $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$ である.
上の A は, 正則行列 U をうまく選ぶと,

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$$

とあらわせる. しかもこのとき, $|c_{1,1}|, |c_{2,2}|, |c_{3,3}| < 1$ となることが確かめられる.

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

北まだらフクロウの個体数の推移のところで出てきた個体数をあらわすベクトルと推移の仕方をあらわす行列を,

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

と書く. $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$ である.
上の A は, 正則行列 U をうまく選ぶと,

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$$

とあらわせる. しかもこのとき, $|c_{1,1}|, |c_{2,2,}|, |c_{3,3}| < 1$ となることが確かめられる.

したがって，

$$\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 = U^{-1} \begin{pmatrix} (c_{1,1})^k & 0 & 0 \\ 0 & (c_{2,2})^k & 0 \\ 0 & 0 & (c_{3,3})^k \end{pmatrix} U \mathbf{x}_0$$

$$\xrightarrow{k \to \infty} \quad U^{-1} O U \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \qquad \text{となる．}$$

ただし O はサイズが $(3,3)$ のゼロ行列（すべての要素が 0 となっている行列）で，$\mathbf{0}$ は 3 次元のゼロ・ベクトルである．

結論． 上のような北まだらフクロウの個体数の推移のモデルで，ある年から次の年への個体数の推移を表す行列が前ページの A のようなものとなっているときには，時間（十分）に経過すると，この北まだらフクロウの集団は絶滅してしまうことが帰結される．

したがって，

$$\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 = U^{-1} \begin{pmatrix} (c_{1,1})^k & 0 & 0 \\ 0 & (c_{2,2})^k & 0 \\ 0 & 0 & (c_{3,3})^k \end{pmatrix} U \mathbf{x}_0$$

$$\xrightarrow{k \to \infty} \quad U^{-1} O U \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$$ となる．

ただし O はサイズが $(3,3)$ のゼロ行列（すべての要素が 0 となっている行列）で，$\mathbf{0}$ は 3 次元のゼロ・ベクトルである．

結論． 上のような北まだらフクロウの個体数の推移のモデルで，ある年から次の年への個体数の推移を表す行列が前ページの A のようなものとなっているときには，時間（十分）に経過すると，この北まだらフクロウの集団は絶滅してしまうことが帰結される．

したがって，

$$\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 = U^{-1} \begin{pmatrix} (c_{1,1})^k & 0 & 0 \\ 0 & (c_{2,2})^k & 0 \\ 0 & 0 & (c_{3,3})^k \end{pmatrix} U \mathbf{x}_0$$

$$\xrightarrow{k \to \infty} \quad U^{-1} O U \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \qquad \text{となる．}$$

ただし O はサイズが $(3,3)$ のゼロ行列（すべての要素が 0 となっている行列）で，$\mathbf{0}$ は 3 次元のゼロ・ベクトルである．

結論． 上のような北まだらフクロウの個体数の推移のモデルで，ある年から次の年への個体数の推移を表す行列が前ページの A のようなものとなっているときには，時間（十分）に経過すると，この北まだらフクロウの集団は絶滅してしまうことが帰結される．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

したがって，

$$\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 = U^{-1} \begin{pmatrix} (c_{1,1})^k & 0 & 0 \\ 0 & (c_{2,2})^k & 0 \\ 0 & 0 & (c_{3,3})^k \end{pmatrix} U \mathbf{x}_0$$

$$\xrightarrow{k \to \infty} \quad U^{-1} O U \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \qquad \text{となる．}$$

ただし O はサイズが $(3,3)$ のゼロ行列（すべての要素が 0 となっている行列）で，$\mathbf{0}$ は 3 次元のゼロ・ベクトルである．

結論． 上のような北まだらフクロウの個体数の推移のモデルで，ある年から次の年への個体数の推移を表す行列が前ページの A のようなものとなっているときには，時間（十分）に経過すると，この北まだらフクロウの集団は絶滅してしまうことが帰結される．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

ここで用いた“推移行列” A は，伐裁が進んで，ところどころに開けた場所のできた森林での状況を反映しているものだったが，伐裁されていない森林では，推移行列 A は，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ \mathbf{0.3} & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

とできるのだった（前回のスライドを参照）．この A を前と同じように $A = U^{-1}\begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$

と分解すると，$c_{1,1}$ $c_{2,2}$，$c_{3,3}$ のうちの一つは絶対値が 1 より大きくなることが確かめられる．したがって，このときには，どのような（ゼロベクトルと異なる） $\mathbf{x}_0$ から出発しても k を大きくしていったとき，$\mathbf{x}_k$ は $\mathbf{0}$ に近づいてはゆかない，つまりこのときには，北まだらフクロウの集団は絶滅しない．

以上の考察から，アメリカの大平洋岸ノースウエストでの北まだらフクロウが絶滅するか否かは森林の伐裁を進めるかどうかに依存していることが結論できる．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

ここで用いた "推移行列" A は，伐裁が進んで，ところどころに開けた場所のできた森林での状況を反映しているものだったが，伐裁されていない森林では，推移行列 A は，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ \mathbf{0.3} & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

とできるのだった（前回のスライドを参照）．この A を前と同じように $A = U^{-1}\begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$ と分解すると，$c_{1,1}$ $c_{2,2}$，$c_{3,3}$ のうちの一つは絶対値が 1 より大きくなることが確かめられる．したがって，このときには，どのような（ゼロベクトルと異なる） $\mathbf{x}_0$ から出発しても k を大きくしていったとき，$\mathbf{x}_k$ は $\mathbf{0}$ に近づいてはゆかない，つまりこのときには，北まだらフクロウの集団は絶滅しない．

以上の考察から，アメリカの大平洋岸ノースウエストでの北まだらフクロウが絶滅するか否かは森林の伐裁を進めるかどうかに依存していることが結論できる．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

ここで用いた “推移行列” A は，伐裁が進んで，ところどころに開けた場所のできた森林での状況を反映しているものだったが，伐裁されていない森林では，推移行列 A は，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ \mathbf{0.3} & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

とできるのだった（前回のスライドを参照）．この A を前と同じように $A = U^{-1}\begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$ と分解すると，$c_{1,1}$ $c_{2,2}$，$c_{3,3}$ のうちの一つは絶対値が 1 より大きくなることが確かめられる．したがって，このときには，どのような（ゼロベクトルと異なる） $\mathbf{x}_0$ から出発しても k を大きくしていったとき，$\mathbf{x}_k$ は $\mathbf{0}$ に近づいてはゆかない，つまりこのときには，北まだらフクロウの集団は絶滅しない．

以上の考察から，アメリカの大平洋岸ノースウエストでの北まだらフクロウが絶滅するか否かは森林の伐裁を進めるかどうかに依存していることが結論できる．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

ここで用いた "推移行列" A は，伐裁が進んで，ところどころに開けた場所のできた森林での状況を反映しているものだったが，伐裁されていない森林では，推移行列 A は，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ \mathbf{0.3} & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

とできるのだった（前回のスライドを参照）．この A を前と同じように $A = U^{-1} \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$ と分解すると，$c_{1,1}$ $c_{2,2}$，$c_{3,3}$ のうちの一つは絶対値が 1 より大きくなることが確かめられる．したがって，このときには，どのような（ゼロベクトルと異なる） x_0 から出発しても k を大きくしていったとき，x_k は $\mathbf{0}$ に近づいてはゆかない，つまりこのときには，北まだらフクロウの集団は絶滅しない．

以上の考察から，アメリカの大平洋岸ノースウエストでの北まだらフクロウが絶滅するか否かは森林の伐裁を進めるかどうかに依存していることが結論できる．

北まだらフクロウの個体数の推移の解析の再論

ここで用いた“推移行列” A は，伐裁が進んで，ところどころに開けた場所のできた森林での状況を反映しているものだったが，伐裁されていない森林では，推移行列 A は，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ \mathbf{0.3} & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix}$$

とできるのだった（前回のスライドを参照）．この A を前と同じように $A = U^{-1}\begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix} U$ と分解すると，$c_{1,1}$ $c_{2,2}$，$c_{3,3}$ のうちの一つは絶対値が 1 より大きくなることが確かめられる．したがって，このときには，どのような（ゼロベクトルと異なる） $\mathbf{x}_0$ から出発しても k を大きくしていったとき，$\mathbf{x}_k$ は $\mathbf{0}$ に近づいてはゆかない，つまりこのときには，北まだらフクロウの集団は絶滅しない．

以上の考察から，アメリカの大平洋岸ノースウエストでの北まだらフクロウが絶滅するか否かは森林の伐裁を進めるかどうかに依存していることが結論できる．

モデルの限界についての注意

ここで用いた数理モデルはかなり簡略化されたものだったので，実際の北まだらフクロウの個体数の推移とはそれほど良い一致を示さない可能性もある．

しかし，北まだらフクロウの絶滅如何という質的な問題に対しては，かなり本質的な答を与えている可能性が高いように思える．

この手法の（北まだらフクロウの絶滅如何という問題に正しい答を与えることとの）客観的な保証がさらに必要とすれば，それは，例えば，生物学における，現在までになされた同様の分析でのこの手法の成功率を調べたり，実際に（過去に絶滅してしまった，あるいは絶滅しなかった）生物のデータにこの手法をあてはめてみることなどで，得ることができるであろう．

モデルの限界についての注意

ここで用いた数理モデルはかなり簡略化されたものだったので，実際の北まだらフクロウの個体数の推移とはそれほど良い一致を示さない可能性もある．

しかし，北まだらフクロウの絶滅如何という質的な問題に対しては，かなり本質的な答を与えている可能性が高いように思える．

この手法の（北まだらフクロウの絶滅如何という問題に正しい答を与えることとの）客観的な保証がさらに必要とすれば，それは，例えば，生物学における，現在までになされた同様の分析でのこの手法の成功率を調べたり，実際に（過去に絶滅してしまった，あるいは絶滅しなかった）生物のデータにこの手法をあてはめてみることなどで，得ることができるであろう．

モデルの限界についての注意

ここで用いた数理モデルはかなり簡略化されたものだったので，実際の北まだらフクロウの個体数の推移とはそれほど良い一致を示さない可能性もある．

しかし，北まだらフクロウの絶滅如何という質的な問題に対しては，かなり本質的な答を与えている可能性が高いように思える．

この手法の（北まだらフクロウの絶滅如何という問題に正しい答を与えることの）客観的な保証がさらに必要とすれば，それは，例えば，生物学における，現在までになされた同様の分析でのこの手法の成功率を調べたり，実際に（過去に絶滅してしまった，あるいは絶滅しなかった）生物のデータにこの手法をあてはめてみることなどで，得ることができるであろう．

モデルの限界についての注意

ここで用いた数理モデルはかなり簡略化されたものだったので，実際の北まだらフクロウの個体数の推移とはそれほど良い一致を示さない可能性もある．

しかし，北まだらフクロウの絶滅如何という質的な問題に対しては，かなり本質的な答を与えている可能性が高いように思える．

この手法の（北まだらフクロウの絶滅如何という問題に正しい答を与えることの）客観的な保証がさらに必要とすれば，それは，例えば，生物学における，現在までになされた同様の分析でのこの手法の成功率を調べたり，実際に（過去に絶滅してしまった，あるいは絶滅しなかった）生物のデータにこの手法をあてはめてみることなどで，得ることができるであろう．

固有値と固有ベクトル

A を (n,n)-行列とする．$\mathbf{0}$ ベクトルと異なる n-次元ベクトル $\mathbf{v}$ が A の 固有ベクトル (eigen vector) とは，ある数 ε があって，$A\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{v}$ となること．このような $\mathbf{v}$ を持つような ε を A の固有値 (eigen value) という．

例.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

だから，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルで，対応する固有値は 5 である．

固有値と固有ベクトル

A を (n,n)-行列とする．$\mathbf{0}$ ベクトルと異なる n-次元ベクトル $\mathbf{v}$ が A の 固有ベクトル (eigen vector) とは，ある数 ε があって，$A\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{v}$ となること．このような $\mathbf{v}$ を持つような ε を A の固有値 (eigen value) という．

例.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

だから，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルで，対応する固有値は 5 である．

固有値と固有ベクトル

A を (n,n)-行列とする．$\mathbf{0}$ ベクトルと異なる n-次元ベクトル $\mathbf{v}$ が A の 固有ベクトル (eigen vector) とは，ある数 ε があって，$A\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{v}$ となること．このような $\mathbf{v}$ を持つような ε を A の固有値 (eigen value) という．

例.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

だから，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルで，対応する固有値は 5 である．

固有ベクトルによる対角化

今，(n, n)-行列 A の固有値が n 個求まったとして，これらを ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ とする.

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ を ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ に対応する固有ベクトルとする（一つの固有値に対して，固有ベクトルは一意には求まらないが各固有値に対し固有ベクトルを一つ選ぶ）.

$$A\mathbf{v_i} = \varepsilon_i \mathbf{v_i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

である.

$V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ で，すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，第 i 列が $\mathbf{v}_i$ の要素と一致するような (n, n)-行列をあらわすことにする.

このとき，

$$AV = (\varepsilon_1 \mathbf{v}_1, \varepsilon_2 \mathbf{v}_2, \ldots, \varepsilon_n \mathbf{v}_n)$$

となる.

固有ベクトルによる対角化

今，(n,n)-行列 A の固有値が n 個求まったとして，これらを ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ とする．

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ を ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ に対応する固有ベクトルとする（一つの固有値に対して，固有ベクトルは一意には求まらないが各固有値に対し固有ベクトルを一つ選ぶ）．

$$A\mathbf{v_i} = \varepsilon_i \mathbf{v_i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

である．

$V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ で，すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，第 i 列が $\mathbf{v}_i$ の要素と一致するような (n,n)-行列をあらわすことにする．

このとき，

$$AV = (\varepsilon_1\mathbf{v}_1, \varepsilon_2\mathbf{v}_2, \ldots, \varepsilon_n\mathbf{v}_n)$$

となる．

固有ベクトルによる対角化

今，(n, n)-行列 A の固有値が n 個求まったとして，これらを ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ とする．

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ に対応する固有ベクトルとする（一つの固有値に対して，固有ベクトルは一意には求まらないが各固有値に対し固有ベクトルを一つ選ぶ）．

$$A\mathbf{v_i} = \varepsilon_i \mathbf{v_i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

である．

$V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ で，すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，第 i 列が $\mathbf{v}_i$ の要素と一致するような (n, n)-行列をあらわすことにする．

このとき，

$$AV = (\varepsilon_1 \mathbf{v}_1, \varepsilon_2 \mathbf{v}_2, \ldots, \varepsilon_n \mathbf{v}_n)$$

となる．

固有ベクトルによる対角化

今，(n,n)-行列 A の固有値が n 個求まったとして，これらを ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ とする．

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ に対応する固有ベクトルとする（一つの固有値に対して，固有ベクトルは一意には求まらないが各固有値に対し固有ベクトルを一つ選ぶ）．

$$A\mathbf{v_i} = \varepsilon_i \mathbf{v_i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

である．

$V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ で，すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，第 i 列が $\mathbf{v}_i$ の要素と一致するような (n,n)-行列をあらわすことにする．

このとき，

$$AV = (\varepsilon_1 \mathbf{v}_1, \varepsilon_2 \mathbf{v}_2, \ldots, \varepsilon_n \mathbf{v}_n)$$

となる．

固有ベクトルによる対角化

今，(n, n)-行列 A の固有値が n 個求まったとして，これらを ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ とする．

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ に対応する固有ベクトルとする（一つの固有値に対して，固有ベクトルは一意には求まらないが各固有値に対し固有ベクトルを一つ選ぶ）．

$$A\mathbf{v_i} = \varepsilon_i \mathbf{v_i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

である．

$V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ で，すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，第 i 列が $\mathbf{v}_i$ の要素と一致するような (n, n)-行列をあらわすことにする．

このとき，

$$AV = (\varepsilon_1 \mathbf{v}_1, \varepsilon_2 \mathbf{v}_2, \ldots, \varepsilon_n \mathbf{v}_n)$$

となる．

固有ベクトルによる対角化

今，(n, n)-行列 A の固有値が n 個求まったとして，これらを ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ とする.

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ に対応する固有ベクトルとする（一つの固有値に対して，固有ベクトルは一意には求まらないが各固有値に対し固有ベクトルを一つ選ぶ）.

$$A\mathbf{v_i} = \varepsilon_i \mathbf{v_i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

である.

$V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ で，すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，第 i 列が $\mathbf{v}_i$ の要素と一致するような (n, n)-行列をあらわすことにする.

このとき，

$$AV = (\varepsilon_1 \mathbf{v}_1, \varepsilon_2 \mathbf{v}_2, \ldots, \varepsilon_n \mathbf{v}_n)$$

となる.

固有ベクトルによる対角化

$$AV = (\varepsilon_1 \mathbf{v}_1, \varepsilon_2 \mathbf{v}_2, \ldots, \varepsilon_n \mathbf{v}_n)$$

となる．V が正則（つまり，逆行列を持つ）とすると，

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

となる．この式の両辺に，左側から V をかけ，右側から V^{-1} をかけると，

$$A = \underbrace{VV^{-1}}_{=E} A \underbrace{VV^{-1}}_{=E} = V \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix} V^{-1}$$

となる．$U = V^{-1}$ とすると，$A = U^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix} U$ となり，A の対角化が得られる．

$$AV = (\varepsilon_1 \mathbf{v}_1, \varepsilon_2 \mathbf{v}_2, \ldots, \varepsilon_n \mathbf{v}_n)$$

となる．V が正則（つまり，逆行列を持つ）とすると，

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

となる．この式の両辺に，左側から V をかけ，右側から V^{-1} をかけると，

$$A = \underbrace{VV^{-1}}_{=E} A \underbrace{VV^{-1}}_{=E} = V \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix} V^{-1}$$

となる．$U = V^{-1}$ とすると，$A = U^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix} U$ となり，A の対角化が得られる．

$$AV = (\varepsilon_1 \mathbf{v}_1, \varepsilon_2 \mathbf{v}_2, \ldots, \varepsilon_n \mathbf{v}_n)$$

となる．V が正則（つまり，逆行列を持つ）とすると，

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

となる．この式の両辺に，左側から V をかけ，右側から V^{-1} をかけると，

$$A = \underbrace{VV^{-1}}_{=E} A \underbrace{VV^{-1}}_{=E} = V \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix} V^{-1}$$

となる．$U = V^{-1}$ とすると，$A = U^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix} U$ となり，A の対角化が得られる．

対角化の例

前の例から，$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とすると，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は A の固有ベクトルで，5 が対応する固有値だった．

同様に，$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ だから，$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ も A の固有ベクトルで，2 が対応する固有値となることがわかる．

したがって，$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ として，$U = V^{-1}$ とすると，A は，

$$A = U^{-1}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} U$$

とあらわされることがわかる．

対角化の例

前の例から，$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とすると，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は A の固有ベクトルで，5 が対応する固有値だった．

同様に，$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ だから，$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ も A の固有ベクトルで，2 が対応する固有値となることがわかる．

したがって，$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ として，$U = V^{-1}$ とすると，A は，

$$A = U^{-1}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}U$$

とあらわされることがわかる．

対角化の例

前の例から，$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とすると，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は A の固有ベクトルで，5 が対応する固有値だった．

同様に，$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ だから，$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ も A の固有ベクトルで，2 が対応する固有値となることがわかる．

したがって，$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ として，$U = V^{-1}$ とすると，A は，

$$A = U^{-1}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} U$$

とあらわされることがわかる．

固有値と固有ベクトルの求めかた

A を (n, n)-行列とするとき，$det(A)$ で A の行列式 (determinant) をあらわす．
行列式は，行列のある特性をあらわす数値である．したがって，$det(\cdot)$ は (n, n)-行列にある数値を対応させる演算となっている．

$det(A)$ は，A の要素のかけ算と和と差の計算式より算出できる．この計算式は n ごとに決まる．

歴史的には，行列式は関孝和（せきたかかず）によって 1683 年（天和（てんな）3 年）に発見された．また関とは独立に，ドイツの G. Leibniz によって 1693 年に発見されている．

ここでは行列式の具体的な形については触れないことにするが，すべての (n, n)-行列 A について，$det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ は正則 $\Leftrightarrow$ 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を持たない という同値が成り立つ，という定理を仮定して議論する．

固有値と固有ベクトルの求めかた

A を (n,n)-行列とするとき，$det(A)$ で A の行列式 (determinant) をあらわす．
行列式は，行列のある特性をあらわす数値である．したがって，$det(\cdot)$ は (n,n)-行列にある数値を対応させる演算となっている．

$det(A)$ は，A の要素のかけ算と和と差の計算式より算出できる．この計算式は n ごとに決まる．

歴史的には，行列式は関孝和（せきたかかず）によって 1683 年（天和（てんな）3 年）に発見された．また関とは独立に，ドイツの G. Leibniz によって 1693 年に発見されている．

ここでは行列式の具体的な形については触れないことにするが，すべての (n,n)-行列 A について，$det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ **は正則** $\Leftrightarrow$ **方程式** $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ **は** $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ **以外の解を持たない** という同値が成り立つ，という定理を仮定して議論する．

固有値と固有ベクトルの求めかた

A を (n, n)-行列とするとき，$det(A)$ で A の行列式 (determinant) をあらわす．
行列式は，行列のある特性をあらわす数値である．したがって，$det(\cdot)$ は (n, n)-行列にある数値を対応させる演算となっている．

$det(A)$ は，A の要素のかけ算と和と差の計算式より算出できる．この計算式は n ごとに決まる．

歴史的には，行列式は関孝和（せきたかかず）によって 1683 年（天和（てんな）3 年）に発見された．また関とは独立に，ドイツの G. Leibniz によって 1693 年に発見されている．

ここでは行列式の具体的な形については触れないことにするが，すべての (n, n)-行列 A について，$det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ は正則 $\Leftrightarrow$ 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を持たない という同値が成り立つ，という定理を仮定して議論する．

固有値と固有ベクトルの求めかた

A を (n, n)-行列とするとき，$det(A)$ で A の行列式 (determinant) をあらわす．
行列式は，行列のある特性をあらわす数値である．したがって，$det(\cdot)$ は (n, n)-行列にある数値を対応させる演算となっている．

$det(A)$ は，A の要素のかけ算と和と差の計算式より算出できる．この計算式は n ごとに決まる．

歴史的には，行列式は関孝和（せきたかかず）によって 1683 年（天和（てんな）3 年）に発見された．また関とは独立に，ドイツの G. Leibniz によって 1693 年に発見されている．

ここでは行列式の具体的な形については触れないことにするが，すべての (n, n)-行列 A について，$det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ は正則 $\Leftrightarrow$ 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を持たない という同値が成り立つ，という定理を仮定して議論する．

固有値と固有ベクトルの求めかた

A を (n, n)-行列とするとき，$det(A)$ で A の行列式 (determinant) をあらわす．
行列式は，行列のある特性をあらわす数値である．したがって，$det(\cdot)$ は (n, n)-行列にある数値を対応させる演算となっている．

$det(A)$ は，A の要素のかけ算と和と差の計算式より算出できる．この計算式は n ごとに決まる．

歴史的には，行列式は関孝和（せきたかかず）によって 1683 年（天和（てんな）3 年）に発見された．また関とは独立に，ドイツの G. Leibniz によって 1693 年に発見されている．

ここでは行列式の具体的な形については触れないことにするが，すべての (n, n)-行列 A について，$det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ は正則 $\Leftrightarrow$ 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を持たない という同値が成り立つ，という定理を仮定して議論する．

固有値と固有ベクトルの求めかた

ある数 ε が A の固有値となるのは，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を n 個の変数からなるベクトルとして，$A\mathbf{x} = \varepsilon\mathbf{x}$ が，ゼロベクトル以外の解を持つときである．

$\varepsilon\mathbf{x} = \varepsilon E\mathbf{x}$ と書けることに注意して上の式の右辺を移項すると，この式は

$$(A - \varepsilon E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

と同値になることがわかるから，前ページで述べた定理により，$det(A - \varepsilon E) = 0$ が成り立つ，という条件が ε が A の固有値であることと同値になることがわかる．

$det(A - \varepsilon E) = 0$ は変数 ε に関する n-次方程式となる．

固有値と固有ベクトルの求めかた

ある数 ε が A の固有値となるのは，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を n 個の変数からなるベクトルとして，$A\mathbf{x} = \varepsilon\mathbf{x}$ が，ゼロベクトル以外の解を持つときである．

$\varepsilon\mathbf{x} = \varepsilon E\mathbf{x}$ と書けることに注意して上の式の右辺を移項すると，この式は

$$(A - \varepsilon E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

と同値になることがわかるから，前ページで述べた定理により，$det(A - \varepsilon E) = 0$ が成り立つ，という条件が ε が A の固有値であることと同値になることがわかる．

$det(A - \varepsilon E) = 0$ は変数 ε に関する n-次方程式となる．

固有値と固有ベクトルの求めかた

ある数 ε が A の固有値となるのは，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を n 個の変数からなるベクトルとして，$A\mathbf{x} = \varepsilon\mathbf{x}$ が，ゼロベクトル以外の解を持つときである．

$\varepsilon\mathbf{x} = \varepsilon E\mathbf{x}$ と書けることに注意して上の式の右辺を移項すると，この式は

$$(A - \varepsilon E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

と同値になることがわかるから，前ページで述べた定理により，$det(A - \varepsilon E) = 0$ が成り立つ，という条件が ε が A の固有値であることと同値になることがわかる．

$det(A - \varepsilon E) = 0$ は変数 ε に関する n-次方程式となる．

固有値の計算例

(2, 2)-行列の行列式は，$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ により計算できる．

対角化の例で取り上げた行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を，これを用いて計算してみる．

$$det(A - \varepsilon E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad det\begin{pmatrix} 3-\varepsilon & 2 \\ 1 & 4-\varepsilon \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-\varepsilon)(4-\varepsilon) - 2 \cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 - 7\varepsilon + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon - 2)(\varepsilon - 5) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \varepsilon = 2$ または $\varepsilon = 5$

固有値の計算例

(2, 2)-行列の行列式は， $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ により計算できる.

対角化の例で取り上げた行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を，これを用いて計算してみる.

$$det(A - \varepsilon E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad det\begin{pmatrix} 3-\varepsilon & 2 \\ 1 & 4-\varepsilon \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-\varepsilon)(4-\varepsilon) - 2 \cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 - 7\varepsilon + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon - 2)(\varepsilon - 5) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \varepsilon = 2$ または $\varepsilon = 5$

固有値の計算例

$(2,2)$-行列の行列式は，$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ により計算できる．

対角化の例で取り上げた行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を，これを用いて計算してみる．

$$det(A - \varepsilon E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad det\begin{pmatrix} 3-\varepsilon & 2 \\ 1 & 4-\varepsilon \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-\varepsilon)(4-\varepsilon) - 2\cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 - 7\varepsilon + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon - 2)(\varepsilon - 5) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \varepsilon = 2$ または $\varepsilon = 5$

固有値の計算例

$(2,2)$-行列の行列式は， $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ により計算できる．

対角化の例で取り上げた行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を，これを用いて計算してみる．

$$det(A - \varepsilon E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad det\begin{pmatrix} 3-\varepsilon & 2 \\ 1 & 4-\varepsilon \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-\varepsilon)(4-\varepsilon) - 2\cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 - 7\varepsilon + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon - 2)(\varepsilon - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon = 2 \text{ または } \varepsilon = 5$$

固有値の計算例

$(2,2)$-行列の行列式は， $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ により計算できる．

対角化の例で取り上げた行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を，これを用いて計算してみる．

$$det(A - \varepsilon E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad det\begin{pmatrix} 3-\varepsilon & 2 \\ 1 & 4-\varepsilon \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-\varepsilon)(4-\varepsilon) - 2\cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 - 7\varepsilon + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon - 2)(\varepsilon - 5) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \varepsilon = 2$ または $\varepsilon = 5$

固有値の計算例

(2, 2)-行列の行列式は，$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ により計算できる．

対角化の例で取り上げた行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を，これを用いて計算してみる．

$$det(A - \varepsilon E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad det\begin{pmatrix} 3-\varepsilon & 2 \\ 1 & 4-\varepsilon \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-\varepsilon)(4-\varepsilon) - 2\cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 - 7\varepsilon + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon - 2)(\varepsilon - 5) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \varepsilon = 2$ または $\varepsilon = 5$

固有値の計算例

$(2,2)$-行列の行列式は, $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ により計算できる.

対角化の例で取り上げた行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を, これを用いて計算してみる.

$$det(A - \varepsilon E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad det\begin{pmatrix} 3-\varepsilon & 2 \\ 1 & 4-\varepsilon \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-\varepsilon)(4-\varepsilon) - 2 \cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 - 7\varepsilon + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon - 2)(\varepsilon - 5) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \varepsilon = 2$ または $\varepsilon = 5$

終