数 理 科 学

2008 年秋学期@中部大学

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp
http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

2008 年 11 月 27 日（第 10 回目）の講義 (December 9, 2008 (10:07) 版)

このスライドは pLATEX + beamer class で作成しています.

A を (n, n)-行列とするとき，A の **対角化** とは，対角行列 (左上から右下への対角線上以外の要素が全部 0 であるような行列) B と正則行列（逆行列の存在するような行列） U で，$A = U^{-1}BU$ となるものを見つけることだった．

ここで，(n, n)-行列 V が (n, n)-行列 U の **逆行列** であるとは，$UV = VU = E$ が成り立つことだった．ここに E は，単位行列（左上から右下の対角線上の要素がすべて 1 であるような対角行列）をあらわす．

ある行列 U の逆行列が存在するときには，U の逆行列はちょうど一つだけ存在する: V と V' を U の逆行列とすると，逆行列の定義から，$UV' = E$, $VU = E$ だから，

$$V = VE = V(UV') = (VU)V' = EV' = V'$$

である．

U の逆行列が存在するときには，その（一つにきまる）逆行列を U^{-1} とあらわすのだった．

A を (n,n)-行列とするとき，A の **対角化** とは，対角行列 (左上から右下への対角線上以外の要素が全部 0 であるような行列) B と正則行列（逆行列の存在するような行列） U で，$A = U^{-1}BU$ となるものを見つけることだった．

ここで，(n,n)-行列 V が (n,n)-行列 U の **逆行列** であるとは，$UV = VU = E$ が成り立つことだった．ここに E は，単位行列（左上から右下の対角線上の要素がすべて 1 であるような対角行列）をあらわす．

ある行列 U の逆行列が存在するときには，U の逆行列はちょうどー一つだけ存在する: V と V' を U の逆行列とすると，逆行列の定義から，$UV' = E$, $VU = E$ だから，

$$V = VE = V(UV') = (VU)V' = EV' = V'$$

である．

U の逆行列が存在するときには，その（一つにきまる）逆行列を U^{-1} とあらわすのだった．

A を (n,n)-行列とするとき，A の **対角化** とは，対角行列 (左上から右下への対角線上以外の要素が全部 0 であるような行列) B と正則行列（逆行列の存在するような行列） U で，$A = U^{-1}BU$ となるものを見つけることだった．

ここで，(n,n)-行列 V が (n,n)-行列 U の **逆行列** であるとは，$UV = VU = E$ が成り立つことだった．ここに E は，単位行列（左上から右下の対角線上の要素がすべて 1 であるような対角行列）をあらわす．

ある行列 U の逆行列が存在するときには，U の逆行列はちょうどー つだけ存在する: V と V' を U の逆行列とすると，逆行列の定義から，$UV' = E$, $VU = E$ だから，

$$V = VE = V(UV') = (VU)V' = EV' = V'$$

である．

U の逆行列が存在するときには，その（一つにきまる）逆行列を U^{-1} とあらわすのだった．

A を (n, n)-行列とするとき，A の 対角化 とは，対角行列 (左上から右下への対角線上以外の要素が全部 0 であるような行列) B と正則行列（逆行列の存在するような行列） U で，$A = U^{-1}BU$ となるものを見つけることだった．

ここで，(n, n)-行列 V が (n, n)-行列 U の 逆行列 であるとは，$UV = VU = E$ が成り立つことだった．ここに E は，単位行列（左上から右下の対角線上の要素がすべて 1 であるような対角行列）をあらわす．

ある行列 U の逆行列が存在するときには，U の逆行列はちょうど一つだけ存在する: V と V' を U の逆行列とすると，逆行列の定義から，$UV' = E$, $VU = E$ だから，

$$V = VE = V(UV') = (VU)V' = EV' = V'$$

である．

U の逆行列が存在するときには，その（一つにきまる）逆行列を U^{-1} とあらわすのだった．

A を (n,n)-行列とするとき，A の 対角化 とは，対角行列 (左上から右下への対角線上以外の要素が全部 0 であるような行列) B と正則行列（逆行列の存在するような行列） U で，$A = U^{-1}BU$ となるものを見つけることだった．

ここで，(n,n)-行列 V が (n,n)-行列 U の 逆行列 であるとは，$UV = VU = E$ が成り立つことだった．ここに E は，単位行列（左上から右下の対角線上の要素がすべて 1 であるような対角行列）をあらわす．

ある行列 U の逆行列が存在するときには，U の逆行列はちょうど一つだけ存在する: V と V' を U の逆行列とすると，逆行列の定義から，$UV' = E$, $VU = E$ だから，

$$V = VE = V(UV') = (VU)V' = EV' = V'$$

である．

U の逆行列が存在するときには，その（一つにきまる）逆行列を U^{-1} とあらわすのだった．

逆行列

実は (n, n)-行列 U に対して，(n, n)-行列 V が，$UV = E$ か $VU = E$ のどちらか一方を満たすことがわかれば，そのことから V が U の逆行列であることが帰結できる（これはそれほど自明ではない．証明には，線型写像に関する“次元定理”とよばれる結果を用いる）．

U が V の逆行列のときには，V は U の逆行列である（逆行列の定義から明らか）．したがって，正則行列 U に対して，$\left(U^{-1}\right)^{-1} = U$ が成り立つ．

逆行列

実は (n, n)-行列 U に対して，(n, n)-行列 V が，$UV = E$ か $VU = E$ のどちらか一方を満たすことがわかれば，そのことから V が U の逆行列であることが帰結できる（これはそれほど自明ではない．証明には，線型写像に関する “次元定理” とよばれる結果を用いる）．

U が V の逆行列のときには，V は U の逆行列である（逆行列の定義から明らか）．したがって，正則行列 U に対して，$\left(U^{-1}\right)^{-1} = U$ が成り立つ．

逆行列

実は (n,n)-行列 U に対して，(n,n)-行列 V が，$UV=E$ か $VU=E$ のどちらか一方を満たすことがわかれば，そのことから V が U の逆行列であることが帰結できる（これはそれほど自明ではない．証明には，線型写像に関する“次元定理”とよばれる結果を用いる）．

U が V の逆行列のときには，V は U の逆行列である（逆行列の定義から明らか）．したがって，正則行列 U に対して，$\left(U^{-1}\right)^{-1}=U$ が成り立つ．

行列 A が異なる固有値 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ を持つとする．$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ を，それぞれ，これらの固有値に対応する固有ベクトルとする．

B を，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ を対角線上に並べてできる対角行列として，$V = (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_n)$ とすると，V は正則行列となるから，$U = V^{-1}$ とすると，$A = U^{-1}BU$ となり，対角化ができるのだった．

ここで，数 ε が行列 A の 固有値 とは，ゼロベクトルでないようなベクトル $\mathbf{v}$ で，$A\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{v}$ となるようなものが存在することだった．このような $\mathbf{v}$ を A の（ε に対応する）固有ベクトル というのだった．

行列 A の固有値は，n-次多項式 $det(A - \alpha I) = 0$ を解くことで得られる．ε が A の固有値のときには，これに対応する固有ベクトルは，連立方程式 $(A - \varepsilon E)\mathbf{x} = 0$ と解くことで得られる．

行列 A が異なる固有値 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ を持つとする．$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ を，それぞれ，これらの固有値に対応する固有ベクトルとする．

B を，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ を対角線上に並べてできる対角行列として，$V = (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_n)$ とすると，V は正則行列となるから，$U = V^{-1}$ とすると，$A = U^{-1}BU$ となり，対角化ができるのだった．

ここで，数 ε が行列 A の **固有値** とは，ゼロベクトルでないようなベクトル $\mathbf{v}$ で，$A\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{v}$ となるようなものが存在することだった．このような $\mathbf{v}$ を A の（ε に対応する）**固有ベクトル** というのだった．

行列 A の固有値は，n-次多項式 $det(A - \alpha I) = 0$ を解くことで得られる．ε が A の固有値のときには，これに対応する固有ベクトルは，連立方程式 $(A - \varepsilon E)\mathbf{x} = 0$ と解くことで得られる．

行列 A が異なる固有値 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ を持つとする．$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ を，それぞれ，これらの固有値に対応する固有ベクトルとする．

B を，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ を対角線上に並べてできる対角行列として，$V = (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_n)$ とすると，V は正則行列となるから，$U = V^{-1}$ とすると，$A = U^{-1}BU$ となり，対角化ができるのだった．

ここで，数 ε が行列 A の **固有値** とは，ゼロベクトルでないようなベクトル $\mathbf{v}$ で，$A\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{v}$ となるようなものが存在することだった．このような $\mathbf{v}$ を A の（ε に対応する）**固有ベクトル** というのだった．

行列 A の固有値は，n-次多項式 $det(A - \alpha I) = 0$ を解くことで得られる．ε が A の固有値のときには，これに対応する固有ベクトルは，連立方程式 $(A - \varepsilon E)\mathbf{x} = 0$ と解くことで得られる．

行列 A が異なる固有値 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ を持つとする．$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ を，それぞれ，これらの固有値に対応する固有ベクトルとする．

B を，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ を対角線上に並べてできる対角行列として，$V = (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\cdots\mathbf{v}_n)$ とすると，V は正則行列となるから， $U = V^{-1}$ とすると，$A = U^{-1}BU$ となり，対角化ができるのだった．

ここで，数 ε が行列 A の **固有値** とは，ゼロベクトルでないようなベクトル $\mathbf{v}$ で，$A\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{v}$ となるようなものが存在することだった．このような $\mathbf{v}$ を A の（ε に対応する）**固有ベクトル** というのだった．

行列 A の固有値は，n-次多項式 $det(A - \alpha I) = 0$ を解くことで得られる．ε が A の固有値のときには，これに対応する固有ベクトルは，連立方程式 $(A - \varepsilon E)\mathbf{x} = 0$ と解くことで得られる．

行列 A が異なる固有値 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ を持つとする．$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ を，それぞれ，これらの固有値に対応する固有ベクトルとする．

B を，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ を対角線上に並べてできる対角行列として，$V = (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_n)$ とすると，V は正則行列となるから，$U = V^{-1}$ とすると，$A = U^{-1}BU$ となり，対角化ができるのだった．

ここで，数 ε が行列 A の **固有値** とは，ゼロベクトルでないようなベクトル $\mathbf{v}$ で，$A\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{v}$ となるようなものが存在することだった．このような $\mathbf{v}$ を A の（ε に対応する）**固有ベクトル** というのだった．

行列 A の固有値は，n-次多項式 $det(A - \alpha I) = 0$ を解くことで得られる．ε が A の固有値のときには，これに対応する固有ベクトルは，連立方程式 $(A - \varepsilon E)\mathbf{x} = 0$ と解くことで得られる．

逆行列の計算

(n, n)-行列の 基本変形 とは,

1. ある行（横書の行）を定数倍する.
2. ある行に他の行の定数倍を加える
3. 2 つの行を入れかえる.

のうちの一つの操作のことであった. これらの操作はある (n, n)-行列を左からかける. という操作として実現できる. たとえば, 「i 行を a 倍する」は,

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} & & & i\text{-列目} & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \text{ 行目} \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & a & \cdots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

を左からかけることで実現できる.

逆行列の計算

(n, n)-行列の 基本変形 とは,

1. ある行（横書の行）を定数倍する.
2. ある行に他の行の定数倍を加える
3. 2 つの行を入れかえる.

のうちの一つの操作のことであった. これらの操作はある (n, n)-行列を左からかける. という操作として実現できる. たとえば,「i 行を a 倍する」は,

$$
\begin{array}{cc}
 & i\text{-列目} \\
i\ \text{行目} & \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & a & \cdots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

を左からかけることで実現できる.

逆行列の計算

(n, n)-行列の **基本変形** とは,

1. ある行（横書の行）を定数倍する.
2. ある行に他の行の定数倍を加える
3. 2 つの行を入れかえる.

のうちの一つの操作のことであった. これらの操作はある (n, n)-行列を左からかける. という操作として実現できる. たとえば,「i 行を a 倍する」は,

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & i\text{-列目} & & \end{matrix} \\
i\ \text{行目} & \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & a & \cdots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

を左からかけることで実現できる.

逆行列の計算 (2)

今，(n,n)-行列 A に基本変形 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ を施して単位行列 E が得られたとする．$f_1, f_2, \ldots, f_k$ 対応する行列を $F_1, F_2, \ldots, F_k$ とすると，これは，

$$F_k \cdots F_2 F_1 A = E$$

ということだから，$B = F_k \cdots F_2 F_1$ とすると，$BA = E$ となり，前に述べたことから，$B = A^{-1}$ となっていることがわかる．

(n,n)-型の単位行列 E に基本変形 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ した結果を C とすると，$C = F_k \cdots F_2 F_1 E = F_k \cdots F_2 F_1 = B$ であるから，これによって A の逆行列が求まる．

逆行列の計算 (2)

今，(n, n)-行列 A に基本変形 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ を施して単位行列 E が得られたとする．$f_1, f_2, \ldots, f_k$ 対応する行列を $F_1, F_2, \ldots, F_k$ とすると，これは，

$$F_k \cdots F_2 F_1 A = E$$

ということだから，$B = F_k \cdots F_2 F_1$ とすると，$BA = E$ となり，前に述べたことから，$B = A^{-1}$ となっていることがわかる．

(n, n)-型の単位行列 E に基本変形 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ した結果を C とすると，$C = F_k \cdots F_2 F_1 E = F_k \cdots F_2 F_1 = B$ であるから，これによって A の逆行列が求まる．

逆行列の計算 (2)

今，(n, n)-行列 A に基本変形 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ を施して単位行列 E が得られたとする．$f_1, f_2, \ldots, f_k$ 対応する行列を $F_1, F_2, \ldots, F_k$ とすると，これは，

$$F_k \cdots F_2 F_1 A = E$$

ということだから，$B = F_k \cdots F_2 F_1$ とすると，$BA = E$ となり，前に述べたことから，$B = A^{-1}$ となっていることがわかる．

(n, n)-型の単位行列 E に基本変形 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ した結果を C とすると，$C = F_k \cdots F_2 F_1 E = F_k \cdots F_2 F_1 = B$ であるから，これによって A の逆行列が求まる．

逆行列の計算 (2)

今，(n,n)-行列 A に基本変形 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ を施して単位行列 E が得られたとする．$f_1, f_2, \ldots, f_k$ 対応する行列を $F_1, F_2, \ldots, F_k$ とすると，これは，

$$F_k \cdots F_2 F_1 A = E$$

ということだから，$B = F_k \cdots F_2 F_1$ とすると，$BA = E$ となり，前に述べたことから，$B = A^{-1}$ となっていることがわかる．

(n,n)-型の単位行列 E に基本変形 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ した結果を C とすると，$C = F_k \cdots F_2 F_1 E = F_k \cdots F_2 F_1 = B$ であるから，これによって A の逆行列が求まる．

マルコフ過程

Andrei Andreyevich Markov
1856 - 1922 （安政 3 年 - 大正 11 年）

Markov process

マルコフ過程の例

都会と田舎の間の人の移動の次のような状況を考える:

毎年，都会に住む人口の 5% は田舎に移住する（95% はそのまま） 田舎に住む人の 3% は都会に移住する（97% はそのまま）

都会に住む人が全人口の α % で田舎に住む人が全人口の β % のとき，この状況を，$\begin{pmatrix} \alpha/100 \\ \beta/100 \end{pmatrix}$ というベクトルで表現することにする．

たとえば，$\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ は，都会に住む人が全人口の 60% であるような状態をあらわしている．

マルコフ過程の例

都会と田舎の間の人の移動の次のような状況を考える:

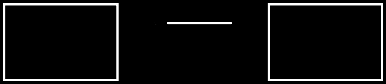
毎年，都会に住む人口の 5% は田舎に移住する（95% はそのまま）
田舎に住む人の 3% は都会に移住する（97% はそのまま）

たとえば，$\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ は，都会に住む人が全人口の 60% であるような状態をあらわしている．

マルコフ過程の例

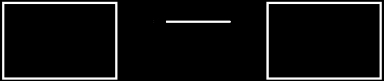
都会と田舎の間の人の移動の次のような状況を考える:

毎年，都会に住む人口の 5% は田舎に移住する（95% はそのまま）
田舎に住む人の 3% は都会に移住する（97% はそのまま）



マルコフ過程の例

$\mathbf{x}_k$ を，ある年から k 年目の，前ページの意味での人口の分布をあらわすベクトルとするとき，



$$A = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}$$

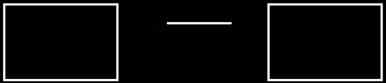
として，

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$$

とあらわされる．

マルコフ過程の例

$\mathbf{x}_k$ を，ある年から k 年目の，前ページの意味での人口の分布をあらわすベクトルとするとき，

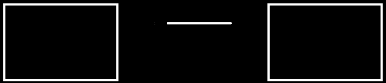


$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$$

とあらわされる．

マルコフ過程の例

$\mathbf{x}_k$ を，ある年から k 年目の，前ページの意味での人口の分布をあらわすベクトルとするとき，



$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ という式は，前回までの北まだらフクロウの個体数の遷移の分析でも出てきた．しかし，ここでの式は北まだらフクロウの個体数の遷移の例と比べて次のような違いがある．

(1) $\mathbf{x}_k$ は各グループの割合（または確率）をあらわすベクトルで成分の和は 1 である．

(2) A は割合（確率）の遷移を惹き起こす行列で，それぞれの列の成分の和は 1 である．

成分の和が 1 になるようなベクトルを **確率ベクトル** とよぶ．それぞれの列の成分の和が 1 となるような $n \times n$-行列を **確率行列** とよぶ．

確率ベクトル $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ が，ある確率行列 A により，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ にとして与えられているとき，ベクトルの列 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ を **マルコフ連鎖** と呼ぶ．マルコフ連鎖で表現される確率（または割合の分布）の推移のことを **マルコフ過程** と呼ぶ．

$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ という式は，前回までの北まだらフクロウの個体数の遷移の分析でも出てきた．しかし，ここでの式は北まだらフクロウの個体数の遷移の例と比べて次のような違いがある．

(1) $\mathbf{x}_k$ は各グループの割合（または確率）をあらわすベクトルで成分の和は 1 である．

(2) A は割合（確率）の遷移を惹き起こす行列で，それぞれの列の成分の和は 1 である．

成分の和が 1 になるようなベクトルを 確率ベクトル とよぶ．それぞれの列の成分の和が 1 となるような $n \times n$-行列を 確率行列 とよぶ．

確率ベクトル $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ が，ある確率行列 A により，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ にとして与えられているとき，ベクトルの列 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ を マルコフ連鎖 と呼ぶ．マルコフ連鎖で表現される確率（または割合の分布）の推移のことを マルコフ過程 と呼ぶ．

北まだらフクロウの例との違い

$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ という式は，前回までの北まだらフクロウの個体数の遷移の分析でも出てきた．しかし，ここでの式は北まだらフクロウの個体数の遷移の例と比べて次のような違いがある．

(1) $\mathbf{x}_k$ は各グループの割合（または確率）をあらわすベクトルで成分の和は 1 である．

(2) A は割合（確率）の遷移を惹き起こす行列で，それぞれの列の成分の和は 1 である．

成分の和が 1 になるようなベクトルを **確率ベクトル** とよぶ．それぞれの列の成分の和が 1 となるような $n \times n$-行列を **確率行列** とよぶ．

確率ベクトル $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ が，ある確率行列 A により，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ にとして与えられているとき，ベクトルの列 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ を **マルコフ連鎖** と呼ぶ．マルコフ連鎖で表現される確率（または割合の分布）の推移のことを **マルコフ過程** と呼ぶ．

北まだらフクロウの例との違い

$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ という式は，前回までの北まだらフクロウの個体数の遷移の分析でも出てきた．しかし，ここでの式は北まだらフクロウの個体数の遷移の例と比べて次のような違いがある．

(1) $\mathbf{x}_k$ は各グループの割合（または確率）をあらわすベクトルで成分の和は 1 である．

(2) A は割合（確率）の遷移を惹き起こす行列で，それぞれの列の成分の和は 1 である．

成分の和が 1 になるようなベクトルを **確率ベクトル** とよぶ．それぞれの列の成分の和が 1 となるような $n \times n$-行列を **確率行列** とよぶ．

確率ベクトル $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ が，ある確率行列 A により，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ にとして与えられているとき，ベクトルの列 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ を **マルコフ連鎖** と呼ぶ．マルコフ連鎖で表現される確率（または割合の分布）の推移のことを **マルコフ過程** と呼ぶ．

北まだらフクロウの例との違い

$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ という式は，前回までの北まだらフクロウの個体数の遷移の分析でも出てきた．しかし，ここでの式は北まだらフクロウの個体数の遷移の例と比べて次のような違いがある．

(1) $\mathbf{x}_k$ は各グループの割合（または確率）をあらわすベクトルで成分の和は 1 である．

(2) A は割合（確率）の遷移を惹き起こす行列で，それぞれの列の成分の和は 1 である．

成分の和が 1 になるようなベクトルを **確率ベクトル** とよぶ．それぞれの列の成分の和が 1 となるような $n \times n$-行列を **確率行列** とよぶ．

確率ベクトル $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ が，ある確率行列 A により，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ にとして与えられているとき，ベクトルの列 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ を **マルコフ連鎖** と呼ぶ．マルコフ連鎖で表現される確率（または割合の分布）の推移のことを **マルコフ過程** と呼ぶ．

$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ という式は，前回までの北まだらフクロウの個体数の遷移の分析でも出てきた．しかし，ここでの式は北まだらフクロウの個体数の遷移の例と比べて次のような違いがある．

(1) $\mathbf{x}_k$ は各グループの割合（または確率）をあらわすベクトルで成分の和は 1 である．

(2) A は割合（確率）の遷移を惹き起こす行列で，それぞれの列の成分の和は 1 である．

成分の和が 1 になるようなベクトルを **確率ベクトル** とよぶ．それぞれの列の成分の和が 1 となるような $n \times n$-行列を **確率行列** とよぶ．

確率ベクトル $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ が，ある確率行列 A により，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ にとして与えられているとき，ベクトルの列 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ を **マルコフ連鎖** と呼ぶ．マルコフ連鎖で表現される確率（または割合の分布）の推移のことを **マルコフ過程** と呼ぶ．

終