数 理 科 学

2008 年秋学期@中部大学

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp
http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

2008 年 12 月 4 日（第 11 回目）の講義 (December 9, 2008 (10:10) 版)

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

マルコフ過程

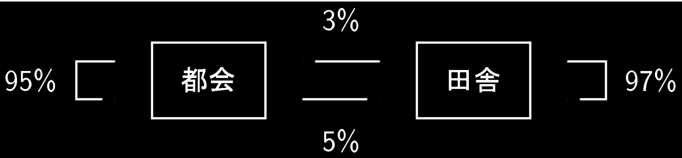
Andrei Andreyevich Markov
1856 - 1922 （安政 3 年 - 大正 11 年）

Markov process

マルコフ過程の例

都会と田舎の間の人の移動の次のような状況を考える:

> 毎年，都会に住む人口の 5% は田舎に移住する（95% はそのまま）
> 田舎に住む人の 3% は都会に移住する（97% はそのまま）



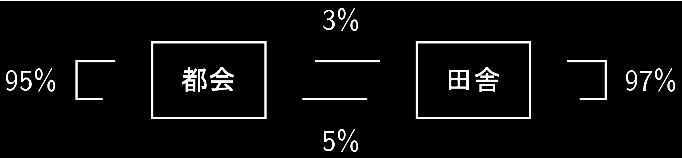
都会に住む人が全人口の α % で田舎に住む人が全人口の β % のとき，この状況を，$\begin{pmatrix} \alpha/100 \\ \beta/100 \end{pmatrix}$ というベクトルで表現することにする．

たとえば，$\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ は，都会に住む人が全人口の 60% であるような状態をあらわしている．

マルコフ過程の例

都会と田舎の間の人の移動の次のような状況を考える:

> 毎年，都会に住む人口の 5% は田舎に移住する（95% はそのまま）
> 田舎に住む人の 3% は都会に移住する（97% はそのまま）



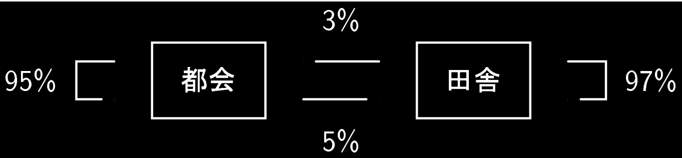
都会に住む人が全人口の α % で田舎に住む人が全人口の β % のとき，この状況を，$\begin{pmatrix} \alpha/100 \\ \beta/100 \end{pmatrix}$ というベクトルで表現することにする．

たとえば，$\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ は，都会に住む人が全人口の 60% であるような状態をあらわしている．

マルコフ過程の例

都会と田舎の間の人の移動の次のような状況を考える:

> 毎年，都会に住む人口の 5% は田舎に移住する（95% はそのまま）
> 田舎に住む人の 3% は都会に移住する（97% はそのまま）

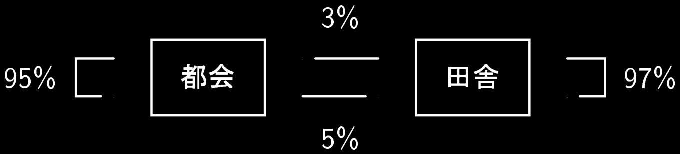


都会に住む人が全人口の α % で田舎に住む人が全人口の β % のとき，この状況を，$\begin{pmatrix} \alpha/100 \\ \beta/100 \end{pmatrix}$ というベクトルで表現することにする．

たとえば，$\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ は，都会に住む人が全人口の 60% であるような状態をあらわしている．

マルコフ過程の例

$\mathbf{x}_k$ を，ある年から k 年目の，前ページの意味での人口の分布をあらわすベクトルとするとき，



は，

$$A = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}$$

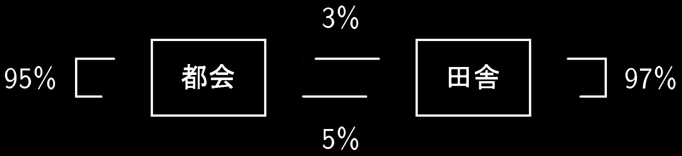
として，

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$$

とあらわされる．

マルコフ過程の例

$\mathbf{x}_k$ を，ある年から k 年目の，前ページの意味での人口の分布をあらわすベクトルとするとき，



は，

$$A = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}$$

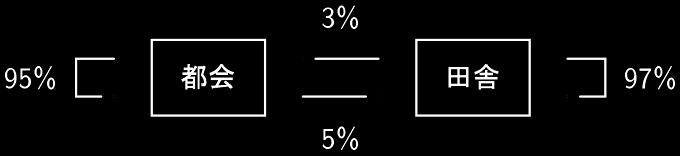
として，

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$$

とあらわされる．

マルコフ過程の例

$\mathbf{x}_k$ を，ある年から k 年目の，前ページの意味での人口の分布をあらわすベクトルとするとき，



は，

$$A = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}$$

として，

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$$

とあらわされる．

北まだらフクロウの例との違い

$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ という式は，前回までの北まだらフクロウの個体数の遷移の分析でも出てきた．しかし，ここでの式は北まだらフクロウの個体数の遷移の例と比べて次のような違いがある．

(1) $\mathbf{x}_k$ は各グループの割合（または確率）をあらわすベクトルで成分の和は 1 である．

(2) A は割合（確率）の遷移を惹き起こす行列で，それぞれの列の成分の和は 1 である．

それぞれの成分が正の実数で，その和が 1 になるようなベクトルを **確率ベクトル** とよぶ．それぞれの列の成分の和が 1 となるような，正の実数を成分とする $n \times n$-行列を **確率行列** とよぶ．

確率ベクトル $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ が，ある確率行列 A により，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ にとして与えられているとき，ベクトルの列 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ を **マルコフ連鎖** と呼ぶ．マルコフ連鎖で表現される確率（または割合の分布）の推移のことを **マルコフ過程** と呼ぶ．

北まだらフクロウの例との違い

$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ という式は，前回までの北まだらフクロウの個体数の遷移の分析でも出てきた．しかし，ここでの式は北まだらフクロウの個体数の遷移の例と比べて次のような違いがある．

(1) $\mathbf{x}_k$ は各グループの割合（または確率）をあらわすベクトルで成分の和は 1 である．

(2) A は割合（確率）の遷移を惹き起こす行列で，それぞれの列の成分の和は 1 である．

それぞれの成分が正の実数で，その和が 1 になるようなベクトルを **確率ベクトル** とよぶ．それぞれの列の成分の和が 1 となるような，正の実数を成分とする $n \times n$-行列を **確率行列** とよぶ．

確率ベクトル $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ が，ある確率行列 A により，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ にとして与えられているとき，ベクトルの列 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ を **マルコフ連鎖** と呼ぶ．マルコフ連鎖で表現される確率（または割合の分布）の推移のことを **マルコフ過程** と呼ぶ．

北まだらフクロウの例との違い

$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ という式は，前回までの北まだらフクロウの個体数の遷移の分析でも出てきた．しかし，ここでの式は北まだらフクロウの個体数の遷移の例と比べて次のような違いがある．

(1) $\mathbf{x}_k$ は各グループの割合（または確率）をあらわすベクトルで成分の和は 1 である．

(2) A は割合（確率）の遷移を惹き起こす行列で，それぞれの列の成分の和は 1 である．

それぞれの成分が正の実数で，その和が 1 になるようなベクトルを **確率ベクトル** とよぶ．それぞれの列の成分の和が 1 となるような，正の実数を成分とする $n \times n$-行列を **確率行列** とよぶ．

確率ベクトル $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ が，ある確率行列 A により，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ にとして与えられているとき，ベクトルの列 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ を **マルコフ連鎖** と呼ぶ．マルコフ連鎖で表現される確率（または割合の分布）の推移のことを **マルコフ過程** と呼ぶ．

北まだらフクロウの例との違い

$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ という式は，前回までの北まだらフクロウの個体数の遷移の分析でも出てきた．しかし，ここでの式は北まだらフクロウの個体数の遷移の例と比べて次のような違いがある．

(1) $\mathbf{x}_k$ は各グループの割合（または確率）をあらわすベクトルで成分の和は 1 である．

(2) A は割合（確率）の遷移を惹き起こす行列で，それぞれの列の成分の和は 1 である．

それぞれの成分が正の実数で，その和が 1 になるようなベクトルを **確率ベクトル** とよぶ．それぞれの列の成分の和が 1 となるような，正の実数を成分とする $n \times n$-行列を **確率行列** とよぶ．

確率ベクトル $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ が，ある確率行列 A により，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ にとして与えられているとき，ベクトルの列 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ を **マルコフ連鎖** と呼ぶ．マルコフ連鎖で表現される確率（または割合の分布）の推移のことを **マルコフ過程** と呼ぶ．

北まだらフクロウの例との違い

$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ という式は，前回までの北まだらフクロウの個体数の遷移の分析でも出てきた．しかし，ここでの式は北まだらフクロウの個体数の遷移の例と比べて次のような違いがある．

(1) $\mathbf{x}_k$ は各グループの割合（または確率）をあらわすベクトルで成分の和は 1 である．

(2) A は割合（確率）の遷移を惹き起こす行列で，それぞれの列の成分の和は 1 である．

それぞれの成分が正の実数で，その和が 1 になるようなベクトルを **確率ベクトル** とよぶ．それぞれの列の成分の和が 1 となるような，正の実数を成分とする $n \times n$-行列を **確率行列** とよぶ．

確率ベクトル $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ が，ある確率行列 A により，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ にとして与えられているとき，ベクトルの列 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ を **マルコフ連鎖** と呼ぶ．マルコフ連鎖で表現される確率（または割合の分布）の推移のことを **マルコフ過程** と呼ぶ．

北まだらフクロウの例との違い

$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ という式は，前回までの北まだらフクロウの個体数の遷移の分析でも出てきた．しかし，ここでの式は北まだらフクロウの個体数の遷移の例と比べて次のような違いがある．

(1) $\mathbf{x}_k$ は各グループの割合（または確率）をあらわすベクトルで成分の和は 1 である．

(2) A は割合（確率）の遷移を惹き起こす行列で，それぞれの列の成分の和は 1 である．

それぞれの成分が正の実数で，その和が 1 になるようなベクトルを **確率ベクトル** とよぶ．それぞれの列の成分の和が 1 となるような，正の実数を成分とする $n \times n$-行列を **確率行列** とよぶ．

確率ベクトル $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ が，ある確率行列 A により，$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ にとして与えられているとき，ベクトルの列 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ を **マルコフ連鎖** と呼ぶ．マルコフ連鎖で表現される確率（または割合の分布）の推移のことを **マルコフ過程** と呼ぶ．

マルコフ過程の基本定理

確率行列 A が **正則** とは，ある数 k に対して A^k の要素がすべて 0 より大きいこととする．

定理 1. A を正則な確率行列とするとき，1 は A の固有値で，1 に対応する固有ベクトルで，確率ベクトルであるようなもの $\mathbf{q}$ （つまり $A\mathbf{q} = \mathbf{q}$ となるような確率ベクトル $\mathbf{q}$）がちょうど一つ存在する．任意の確率ベクトル $\mathbf{x}_0$ から出発して $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2$, $\cdots$ とするとき，$\mathbf{x}_k$ は，k を大きくしてゆくと $\mathbf{q}$ に近づく．

上のような $\mathbf{q}$ を確率行列 A の **定常状態** とよぶ．

$(2,2)$-行列に対しては，上の定理は比較的簡単に証明できる．

マルコフ過程の基本定理

確率行列 A が **正則** とは，ある数 k に対して A^k の要素がすべて 0 より大きいこととする．

定理 1. A を正則な確率行列とするとき，1 は A の固有値で，1 に対応する固有ベクトルで，確率ベクトルであるようなもの $\mathbf{q}$ （つまり $A\mathbf{q} = \mathbf{q}$ となるような確率ベクトル $\mathbf{q}$）がちょうど一つ存在する．任意の確率ベクトル $\mathbf{x}_0$ から出発して $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2$, $\cdots$ とするとき，$\mathbf{x}_k$ は，k を大きくしてゆくと $\mathbf{q}$ に近づく．

上のような $\mathbf{q}$ を確率行列 A の **定常状態** とよぶ．

$(2,2)$-行列に対しては，上の定理は比較的簡単に証明できる．

マルコフ過程の基本定理

確率行列 A が **正則** とは，ある数 k に対して A^k の要素がすべて 0 より大きいこととする．

> **定理 1.** A を正則な確率行列とするとき，1 は A の固有値で，1 に対応する固有ベクトルで，確率ベクトルであるようなもの $\mathbf{q}$ （つまり $A\mathbf{q} = \mathbf{q}$ となるような確率ベクトル $\mathbf{q}$）がちょうど一つ存在する．任意の確率ベクトル $\mathbf{x}_0$ から出発して $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2$, $\cdots$ とするとき，$\mathbf{x}_k$ は，k を大きくしてゆくと $\mathbf{q}$ に近づく．

上のような $\mathbf{q}$ を確率行列 A の **定常状態** とよぶ．

$(2,2)$-行列に対しては，上の定理は比較的簡単に証明できる．

マルコフ過程の基本定理

確率行列 A が **正則** とは，ある数 k に対して A^k の要素がすべて 0 より大きいこととする．

定理 1. A を正則な確率行列とするとき，1 は A の固有値で，1 に対応する固有ベクトルで，確率ベクトルであるようなもの $\mathbf{q}$ （つまり $A\mathbf{q} = \mathbf{q}$ となるような確率ベクトル $\mathbf{q}$）がちょうど一つ存在する．任意の確率ベクトル $\mathbf{x}_0$ から出発して $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2$, $\cdots$ とするとき，$\mathbf{x}_k$ は，k を大きくしてゆくと $\mathbf{q}$ に近づく．

上のような $\mathbf{q}$ を確率行列 A の **定常状態** とよぶ．

$(2, 2)$-行列に対しては，上の定理は比較的簡単に証明できる．

基本定理の応用

都会と田舎のモデルでの確率行列

$$A = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}$$

では,

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad x + y = 1$$

を解くと, $x = \frac{3}{8}$, $y = \frac{5}{8}$ が得られる. したがって, $\begin{pmatrix} 3/8 \\ 5/8 \end{pmatrix}$ がこの確率行列の定常状態である. 前ページの定理 1. をこれに応用すると:

都会と田舎のモデルでは, どの人口比から出発しても, 都会に住む人と田舎に住む人の人口比は年がすすむにつれて 3 : 5 に近づく.

基本定理の応用

都会と田舎のモデルでの確率行列

$$A = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}$$

では,

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad x + y = 1$$

を解くと, $x = \frac{3}{8}$, $y = \frac{5}{8}$ が得られる. したがって, $\begin{pmatrix} 3/8 \\ 5/8 \end{pmatrix}$ がこの確率行列の定常状態である. 前ページの定理 1. をこれに応用すると:

> 都会と田舎のモデルでは, どの人口比から出発しても, 都会に住む人と田舎に住む人の人口比は年がすすむにつれて 3 : 5 に近づく.

基本定理の応用

都会と田舎のモデルでの確率行列

$$A = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}$$

では,

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad x + y = 1$$

を解くと, $x = \frac{3}{8}$, $y = \frac{5}{8}$ が得られる. したがって, $\begin{pmatrix} 3/8 \\ 5/8 \end{pmatrix}$ がこの確率行列の定常状態である. 前ページの定理 1. をこれに応用すると:

> 都会と田舎のモデルでは, どの人口比から出発しても, 都会に住む人と田舎に住む人の人口比は年がすすむにつれて 3 : 5 に近づく.

基本定理の応用

都会と田舎のモデルでの確率行列

$$A = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}$$

では，

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad x + y = 1$$

を解くと，$x = \frac{3}{8}$, $y = \frac{5}{8}$ が得られる．したがって，$\begin{pmatrix} 3/8 \\ 5/8 \end{pmatrix}$ がこの確率行列の定常状態である．前ページの定理 1. をこれに応用すると:

都会と田舎のモデルでは，どの人口比から出発しても，都会に住む人と田舎に住む人の人口比は年がすすむにつれて 3 : 5 に近づく．

基本定理の二次元版の証明

A が $(2,2)$-サイズの正則な確率行列である場合での定理 1. を証明する．A が確率行列であることから，$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$ と書ける．A は正則だから，必要なら A をある自然数 k に対する A^k で置き換えることで，A の要素はすべて 0 より真に大きい，つまり，

(1) $0 < \alpha, \beta < 1$

としてよい．A の固有値は，$det(A - xE) = 0$ の解となるのだったが，この式を計算すると，

$$det(A - xE) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det \begin{pmatrix} \alpha - x & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta-x \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha - x)(1-\beta-x) - (1-\alpha)\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)(-\alpha) + (x-1)x + (x-1)\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)(x-\alpha+\beta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ または，} x = \alpha - \beta.$$

$c = \alpha - \beta$ とすると，(1) により，$-1 < c < 1$ つまり，$|c| < 1$ である．

基本定理の二次元版の証明

A が $(2,2)$-サイズの正則な確率行列である場合での定理 1. を証明する．A が確率行列であることから，$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$ と書ける．A は正則だから，必要なら A をある自然数 k に対する A^k で置き換えることで，A の要素はすべて 0 より真に大きい，つまり，

(1) $0 < \alpha, \beta < 1$

としてよい．A の固有値は，$det(A - xE) = 0$ の解となるのだったが，この式を計算すると，

$$det(A - xE) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det\begin{pmatrix} \alpha - x & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta-x \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (\alpha - x)(1-\beta-x) - (1-\alpha)\beta = 0$$
$$\Leftrightarrow \ (x-1)(-\alpha) + (x-1)x + (x-1)\beta = 0$$
$$\Leftrightarrow \ (x-1)(x-\alpha+\beta) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 1 \text{ または, } x = \alpha - \beta.$$

$c = \alpha - \beta$ とすると，(1) により，$-1 < c < 1$ つまり，$|c| < 1$ である．

基本定理の二次元版の証明

A が $(2,2)$-サイズの正則な確率行列である場合での定理 1. を証明する．A が確率行列であることから，$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$ と書ける．A は正則だから，必要なら A をある自然数 k に対する A^k で置き換えることで，A の要素はすべて 0 より真に大きい，つまり，

(1) $0 < \alpha, \beta < 1$

としてよい．A の固有値は，$det(A - xE) = 0$ の解となるのだったが，この式を計算すると，

$$det(A - xE) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det \begin{pmatrix} \alpha - x & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta-x \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (\alpha - x)(1-\beta-x) - (1-\alpha)\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (x-1)(-\alpha) + (x-1)x + (x-1)\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (x-1)(x-\alpha+\beta) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 1 \text{ または，} x = \alpha - \beta.$$

$c = \alpha - \beta$ とすると，(1) により，$-1 < c < 1$ つまり，$|c| < 1$ である．

基本定理の二次元版の証明

A が $(2,2)$-サイズの正則な確率行列である場合での定理 1. を証明する．A が確率行列であることから，$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$ と書ける．A は正則だから，必要なら A をある自然数 k に対する A^k で置き換えることで，A の要素はすべて 0 より真に大きい，つまり，

(1) $0 < \alpha, \beta < 1$

としてよい．A の固有値は，$det(A - xE) = 0$ の解となるのだったが，この式を計算すると，

$$det(A - xE) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det \begin{pmatrix} \alpha - x & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta-x \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (\alpha - x)(1-\beta-x) - (1-\alpha)\beta = 0$$
$$\Leftrightarrow \ (x-1)(-\alpha) + (x-1)x + (x-1)\beta = 0$$
$$\Leftrightarrow \ (x-1)(x-\alpha+\beta) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 1 \text{ または，} x = \alpha - \beta.$$

$c = \alpha - \beta$ とすると，(1) により，$-1 < c < 1$ つまり，$|c| < 1$ である．

上で 1 は A の固有値の一つであることが示せた． A の定常状態ベクトルは，（もし存在するとすれば）連立方程式

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ x+y=1 \end{cases}$$

の解だが，この連立方程式を解くと， $x = \dfrac{\beta}{1-\alpha+\beta}$,

$y = \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha+\beta}$ が得られ，定常状態ベクトル $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{1-\alpha+\beta} \\ \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\beta} \end{pmatrix}$

が，確かに一意に存在することが確かめられる．

固有値 $c = \alpha - \beta$ については，

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha-\beta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を解くと，

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトルの一つであることがわかる．

上で 1 は A の固有値の一つであることが示せた． A の定常状態ベクトルは,（もし存在するとすれば）連立方程式

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ x + y = 1 \end{cases}$$

の解だが，この連立方程式を解くと，$x = \dfrac{\beta}{1-\alpha+\beta}$,

$y = \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha+\beta}$ が得られ，定常状態ベクトル $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{1-\alpha+\beta} \\ \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\beta} \end{pmatrix}$

が，確かに一意に存在することが確かめられる．

固有値 $c = \alpha - \beta$ については,

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha - \beta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を解くと,

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトルの一つであることがわかる．

ここで $\mathbf{x}$ を任意の 2 次元の確率ベクトルとする．このとき，実数 a, b を選んで，$\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} = a\mathbf{q} + b\mathbf{r}$ とあらわす．

$\mathbf{q}$ と $\mathbf{r}$ は異なる固有値に属するから，独立なので，これは常に可能で，このときの a と b は一意に決まる．

$\mathbf{r}$ の成分の和は 0 だから，$b\mathbf{r}$ の成分の和も 0 である．したがって，$\mathbf{x}$ が確率ベクトルであることから，$a = 1$ とならなくてはならないことがわかる．よって $\mathbf{x} = \mathbf{q} + b\mathbf{r}$ である．

このとき，任意の自然数 k に対し

$$A^k\mathbf{x} = A^k(\mathbf{q} + b\mathbf{r}) = A^k\mathbf{q} + bA^k\mathbf{r} = \mathbf{q} + bc^k\mathbf{r}$$

となる．ここで $k \to \infty$ なら $c^k \to 0$ だから，$k \to \infty$ なら $A^k \to \mathbf{q}$ となることがわかる．（証明終り）

基本定理の二次元版の証明（続 2） 数理科学・マルコフ過程 (10/17)

ここで $\mathbf{x}$ を任意の 2 次元の確率ベクトルとする．このとき，実数 a, b を選んで，$\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} = a\mathbf{q} + b\mathbf{r}$ とあらわす．

$\mathbf{q}$ と $\mathbf{r}$ は異なる固有値に属するから，独立なので，これは常に可能で，このときの a と b は一意に決まる．

$\mathbf{r}$ の成分の和は 0 だから，$b\mathbf{r}$ の成分の和も 0 である．したがって，$\mathbf{x}$ が確率ベクトルであることから，$a = 1$ とならなくてはならないことがわかる．よって $\mathbf{x} = \mathbf{q} + b\mathbf{r}$ である．

このとき，任意の自然数 k に対し

$$A^k\mathbf{x} = A^k(\mathbf{q} + b\mathbf{r}) = A^k\mathbf{q} + bA^k\mathbf{r} = \mathbf{q} + bc^k\mathbf{r}$$

となる．ここで $k \to \infty$ なら $c^k \to 0$ だから，$k \to \infty$ なら $A^k \to \mathbf{q}$ となることがわかる． （証明終り）

ここで $\mathbf{x}$ を任意の 2 次元の確率ベクトルとする．このとき，実数 a, b を選んで，$\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} = a\mathbf{q} + b\mathbf{r}$ とあらわす．

$\mathbf{q}$ と $\mathbf{r}$ は異なる固有値に属するから，独立なので，これは常に可能で，このときの a と b は一意に決まる．

$\mathbf{r}$ の成分の和は 0 だから，$b\mathbf{r}$ の成分の和も 0 である．したがって，$\mathbf{x}$ が確率ベクトルであることから，$a = 1$ とならなくてはならないことがわかる．よって $\mathbf{x} = \mathbf{q} + b\mathbf{r}$ である．

このとき，任意の自然数 k に対し

$$A^k\mathbf{x} = A^k(\mathbf{q} + b\mathbf{r}) = A^k\mathbf{q} + bA^k\mathbf{r} = \mathbf{q} + bc^k\mathbf{r}$$

となる．ここで $k \to \infty$ なら $c^k \to 0$ だから，$k \to \infty$ なら $A^k \to \mathbf{q}$ となることがわかる． （証明終り）

ここで $\mathbf{x}$ を任意の 2 次元の確率ベクトルとする．このとき，実数 a, b を選んで，$\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} = a\mathbf{q} + b\mathbf{r}$ とあらわす．

$\mathbf{q}$ と $\mathbf{r}$ は異なる固有値に属するから，独立なので，これは常に可能で，このときの a と b は一意に決まる．

$\mathbf{r}$ の成分の和は 0 だから，$b\mathbf{r}$ の成分の和も 0 である．したがって，$\mathbf{x}$ が確率ベクトルであることから，$a = 1$ とならなくてはならないことがわかる．よって $\mathbf{x} = \mathbf{q} + b\mathbf{r}$ である．

このとき，任意の自然数 k に対し

$$A^k\mathbf{x} = A^k(\mathbf{q} + b\mathbf{r}) = A^k\mathbf{q} + bA^k\mathbf{r} = \mathbf{q} + bc^k\mathbf{r}$$

となる．ここで $k \to \infty$ なら $c^k \to 0$ だから，$k \to \infty$ なら $A^k \to \mathbf{q}$ となることがわかる． （証明終り）

ここで $\mathbf{x}$ を任意の 2 次元の確率ベクトルとする．このとき，実数 a, b を選んで，$\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} = a\mathbf{q} + b\mathbf{r}$ とあらわす．

$\mathbf{q}$ と $\mathbf{r}$ は異なる固有値に属するから，独立なので，これは常に可能で，このときの a と b は一意に決まる．

$\mathbf{r}$ の成分の和は 0 だから，$b\mathbf{r}$ の成分の和も 0 である．したがって，$\mathbf{x}$ が確率ベクトルであることから，$a = 1$ とならなくてはならないことがわかる．よって $\mathbf{x} = \mathbf{q} + b\mathbf{r}$ である．

このとき，任意の自然数 k に対し

$$A^k\mathbf{x} = A^k(\mathbf{q} + b\mathbf{r}) = A^k\mathbf{q} + bA^k\mathbf{r} = \mathbf{q} + bc^k\mathbf{r}$$

となる．ここで $k \to \infty$ なら $c^k \to 0$ だから，$k \to \infty$ なら $A^k \to \mathbf{q}$ となることがわかる．（証明終り）

基本定理の二次元版の証明（続 2）数理科学・マルコフ過程 (10/17)

ここで $\mathbf{x}$ を任意の 2 次元の確率ベクトルとする．このとき，実数 a, b を選んで，$\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} = a\mathbf{q} + b\mathbf{r}$ とあらわす．

$\mathbf{q}$ と $\mathbf{r}$ は異なる固有値に属するから，独立なので，これは常に可能で，このときの a と b は一意に決まる．

$\mathbf{r}$ の成分の和は 0 だから，$b\mathbf{r}$ の成分の和も 0 である．したがって，$\mathbf{x}$ が確率ベクトルであることから，$a = 1$ とならなくてはならないことがわかる．よって $\mathbf{x} = \mathbf{q} + b\mathbf{r}$ である．

このとき，任意の自然数 k に対し

$$A^k\mathbf{x} = A^k(\mathbf{q} + b\mathbf{r}) = A^k\mathbf{q} + bA^k\mathbf{r} = \mathbf{q} + bc^k\mathbf{r}$$

となる．ここで $k \to \infty$ なら $c^k \to 0$ だから，$k \to \infty$ なら $A^k \to \mathbf{q}$ となることがわかる． （証明終り）

マーケット・シェア

（簡単のため）M 社の車と T 社の車が自動車のシェアを二分しているような世界を考える．M 社の車を持っている人の **90%** は次の買いかえのときにふたたび M 社の車を買い，残りの **10%** は T 社の車を買う．また T 社の車を持っている人の **60%** はふたたび T 社の車を買うが，**40%** の人は M 社の車に買いかえる．

k 回買いかえの時期を経たときの M 社の車を持っている人の比率を α_k，T 社の車を持っている人の比率を β_k として，$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}$ とするとき，遷移行列は，$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$ となる．

この行列は正則で，定常状態は $\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ である．したがって，M 社と T 社の車のシェアはどのシェアの比率から出発しても $4:1$ に近づく．

マーケット・シェア

（簡単のため）M 社の車と T 社の車が自動車のシェアを二分しているような世界を考える．M 社の車を持っている人の **90%** は次の買いかえのときにふたたび M 社の車を買い，残りの **10%** は T 社の車を買う．また T 社の車を持っている人の **60%** はふたたび T 社の車を買うが，**40%** の人は M 社の車に買いかえる．

k 回買いかえの時期を経たときの M 社の車を持っている人の比率を α_k, T 社の車を持っている人の比率を β_k として，

$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}$ とするとき，遷移行列は，$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$ となる．

この行列は正則で，定常状態は $\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ である．したがって，M 社と T 社の車のシェアはどのシェアの比率から出発しても $4:1$ に近づく．

マーケット・シェア

（簡単のため）M 社の車と T 社の車が自動車のシェアを二分しているような世界を考える．M 社の車を持っている人の **90%** は次の買いかえのときにふたたび M 社の車を買い，残りの **10%** は T 社の車を買う．また T 社の車を持っている人の **60%** はふたたび T 社の車を買うが，**40%** の人は M 社の車に買いかえる．

k 回買いかえの時期を経たときの M 社の車を持っている人の比率を α_k，T 社の車を持っている人の比率を β_k として，
$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}$ とするとき，遷移行列は，$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$ となる．
この行列は正則で，定常状態は $\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ である．したがって，M 社と T 社の車のシェアはどのシェアの比率から出発しても 4 : 1 に近づく．

フェルメールの偽作

フェルメール (Johannes Vermeer, 1632 年（寛永 9 年）- 1675 年（延宝 3 年）):
『真珠の耳飾りの少女』 (1665 年頃)

フェルメールの偽作

第二次世界大戦でベルギーがドイツの占領から解放された後，オランダ人のナチスの協力者狩りが行われた．この一掃作戦において，ドイツに芸術品を多数売っていたある会社の帳簿に（ドイツ国家上位元帥）ゲーリングに「キリストと不貞な女」という（17世紀オランダの有名な画家である）フェルメールによる絵画の売却で仲介役をしていた銀行家の名前が浮上した．

銀行家は，オランダ人のファン・メーヘレン という名前の三流画家がこの取り引きでの絵画の売り主であることを事情聴取で自白したので，1945 年 5 月 29 日に，このファン・メーヘレンが敵国との共謀の容疑で逮捕された．

ところが，1945 年の 6 月 12 日に，獄中のファン・メーヘレンは，フェルメールの絵ををゲーリングに売却したりはしていなくて，この絵も，有名な『エマオのキリストと使徒たち』や他のいくつかのフェルメールや他の有名な画家の作とされている絵も彼の偽作である，と主張して世間を驚かせた．

フェルメールの偽作

第二次世界大戦でベルギーがドイツの占領から解放された後，オランダ人のナチスの協力者狩りが行われた．この一掃作戦において，ドイツに芸術品を多数売っていたある会社の帳簿に（ドイツ国家上位元帥）ゲーリングに「キリストと不貞な女」という（17世紀オランダの有名な画家である）フェルメールによる絵画の売却で仲介役をしていた銀行家の名前が浮上した．

銀行家は，オランダ人のファン・メーヘレン という名前の三流画家がこの取り引きでの絵画の売り主であることを事情聴取で自白したので，1945 年 5 月 29 日に，このファン・メーヘレンが敵国との共謀の容疑で逮捕された．

ところが，1945 年の 6 月 12 日に，獄中のファン・メーヘレンは，フェルメールの絵ををゲーリングに売却したりはしていなくて，この絵も，有名な『エマオのキリストと使徒たち』や他のいくつかのフェルメールや他の有名な画家の作とされている絵も彼の偽作である，と主張して世間を驚かせた．

フェルメールの偽作

第二次世界大戦でベルギーがドイツの占領から解放された後，オランダ人のナチスの協力者狩りが行われた．この一掃作戦において，ドイツに芸術品を多数売っていたある会社の帳簿に（ドイツ国家上位元帥）ゲーリングに「キリストと不貞な女」という（17世紀オランダの有名な画家である）フェルメールによる絵画の売却で仲介役をしていた銀行家の名前が浮上した．

銀行家は，オランダ人のファン・メーヘレン という名前の三流画家がこの取り引きでの絵画の売り主であることを事情聴取で自白したので，1945 年 5 月 29 日に，このファン・メーヘレンが敵国との共謀の容疑で逮捕された．

ところが，1945 年の 6 月 12 日に，獄中のファン・メーヘレンは，フェルメールの絵ををゲーリングに売却したりはしていなくて，この絵も，有名な 『エマオのキリストと使徒たち』 や他のいくつかのフェルメールや他の有名な画家の作とされている絵も彼の偽作である，と主張して世間を驚かせた．

フェルメールの偽作

結局，ファン・メーヘレンは偽造罪で 1 年の禁固刑に処された．この刑期中の 1947 年 12 月 30 日にファン・メーヘレンは心臓麻痺でなくなっている．

ところが，このように専門家委員会からの沢山の証拠が揃っていたにもかかわらず,『エマオのキリストと使徒たち』に関しては，多くの人が，これが偽作でないという信念を変えなかった．その論拠は，他の偽作と言われている絵画がすべて芸術絵画として駄作だったのに，この作品だけはそうではなかったことであった．

彼等は『エマオのキリストと使徒たち』を描いたのと同じ芸術家が，そのような駄作を描くはずはない，と主張したのだった．しかも，著名な芸術史研究科の A. ブレディウスがこの『エマオのキリストと使徒たち』は正真正銘フェルメールの作であると断言していたし，レンブラント協会はこの絵画を 170 000 ドルで購入していたのだった．

フェルメールの偽作

結局，ファン・メーヘレンは偽造罪で 1 年の禁固刑に処された．この刑期中の 1947 年 12 月 30 日にファン・メーヘレンは心臓麻痺でなくなっている．

ところが，このように専門家委員会からの沢山の証拠が揃っていたにもかかわらず,『エマオのキリストと使徒たち』に関しては，多くの人が，これが偽作でないという信念を変えなかった．その論拠は，他の偽作と言われている絵画がすべて芸術絵画として駄作だったのに，この作品だけはそうではなかったことであった．

彼等は『エマオのキリストと使徒たち』を描いたのと同じ芸術家が，そのような駄作を描くはずはない，と主張したのだった．しかも，著名な芸術史研究科の A. ブレディウスがこの『エマオのキリストと使徒たち』は正真正銘フェルメールの作であると断言していたし，レンブラント協会はこの絵画を 170 000 ドルで購入していたのだった．

フェルメールの偽作

結局，ファン・メーヘレンは偽造罪で 1 年の禁固刑に処された．この刑期中の 1947 年 12 月 30 日にファン・メーヘレンは心臓麻痺でなくなっている．

ところが，このように専門家委員会からの沢山の証拠が揃っていたにもかかわらず，『エマオのキリストと使徒たち』に関しては，多くの人が，これが偽作でないという信念を変えなかった．その論拠は，他の偽作と言われている絵画がすべて芸術絵画として駄作だったのに，この作品だけはそうではなかったことであった．

彼等は『エマオのキリストと使徒たち』を描いたのと同じ芸術家が，そのような駄作を描くはずはない，と主張したのだった．しかも，著名な芸術史研究科の A. ブレディウスがこの『エマオのキリストと使徒たち』は正真正銘フェルメールの作であると断言していたし，レンブラント協会はこの絵画を 170 000 ドルで購入していたのだった．

フェルメールの偽作

結局，ファン・メーヘレンは偽造罪で 1 年の禁固刑に処された．この刑期中の 1947 年 12 月 30 日にファン・メーヘレンは心臓麻痺でなくなっている．

ところが，このように専門家委員会からの沢山の証拠が揃っていたにもかかわらず，『エマオのキリストと使徒たち』に関しては，多くの人が，これが偽作でないという信念を変えなかった．その論拠は，他の偽作と言われている絵画がすべて芸術絵画として駄作だったのに，この作品だけはそうではなかったことであった．

彼等は『エマオのキリストと使徒たち』を描いたのと同じ芸術家が，そのような駄作を描くはずはない，と主張したのだった．しかも，著名な芸術史研究科の A. ブレディウスがこの『エマオのキリストと使徒たち』は正真正銘フェルメールの作であると断言していたし，レンブラント協会はこの絵画を 170 000 ドルで購入していたのだった．

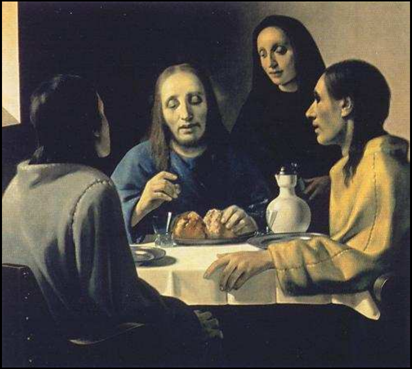
フェルメールの偽作

結局，ファン・メーヘレンは偽造罪で 1 年の禁固刑に処された．この刑期中の 1947 年 12 月 30 日にファン・メーヘレンは心臓麻痺でなくなっている．

ところが，このように専門家委員会からの沢山の証拠が揃っていたにもかかわらず,『エマオのキリストと使徒たち』に関しては,多くの人が，これが偽作でないという信念を変えなかった．その論拠は，他の偽作と言われている絵画がすべて芸術絵画として駄作だったのに，この作品だけはそうではなかったことであった．

彼等は『エマオのキリストと使徒たち』を描いたのと同じ芸術家が，そのような駄作を描くはずはない，と主張したのだった．しかも，著名な芸術史研究科の A. ブレディウスがこの『エマオのキリストと使徒たち』は正真正銘フェルメールの作であると断言していたし，レンブラント協会はこの絵画を 170 000 ドルで購入していたのだった．

フェルメールの偽作



ハン・ファン・メーヘレン（Han van Meegeren、1889 年（明治 22 年）- 1947 年（昭和 22 年））
『エマオのキリストと使徒たち』（Wikipedia にリンクされた画像ファイル）

フェルメールの偽作

これに対して，調査委員会は，ファン・メーヘレンは『エマオのキリストと使徒たち』を描いたときには，芸術界で認められていなかった自分が三流画家などではないとを世に知らしめるために本気になって描いたが，これがうまく売りさばけると味をしめて，他の作では適当に手をぬいたのだろう，と主張した．

しかし，決定的な科学的証拠がなければ，偽作説を受け入れない人々の意見を変えることはできなかった．

そのような決定的な科学的な証拠は，1967 年になって，やっと，カーネギーメロン大学（アメリカ，ピッツバーク／オハイオ）の科学者たちによって得られている．

ここで用いられたのが，放射性物質による年代測定であった．

フェルメールの偽作

これに対して，調査委員会は，ファン・メーヘレンは『エマオのキリストと使徒たち』を描いたときには，芸術界で認められていなかった自分が三流画家などではないとを世に知らしめるために本気になって描いたが，これがうまく売りさばけると味をしめて，他の作では適当に手をぬいたのだろう，と主張した．

しかし，決定的な科学的証拠がなければ，偽作説を受け入れない人々の意見を変えることはできなかった．

そのような決定的な科学的な証拠は，1967 年になって，やっと，カーネギーメロン大学（アメリカ，ピッツバーク／オハイオ）の科学者たちによって得られている．

ここで用いられたのが，放射性物質による年代測定であった．

フェルメールの偽作

これに対して，調査委員会は，ファン・メーヘレンは『エマオのキリストと使徒たち』を描いたときには，芸術界で認められていなかった自分が三流画家などではないとを世に知らしめるために本気になって描いたが，これがうまく売りさばけると味をしめて，他の作では適当に手をぬいたのだろう，と主張した．

しかし，決定的な科学的証拠がなければ，偽作説を受け入れない人々の意見を変えることはできなかった．

そのような決定的な科学的な証拠は，1967 年になって，やっと，カーネギーメロン大学（アメリカ，ピッツバーク／オハイオ）の科学者たちによって得られている．

ここで用いられたのが，放射性物質による年代測定であった．

フェルメールの偽作

これに対して，調査委員会は，ファン・メーヘレンは『エマオのキリストと使徒たち』を描いたときには，芸術界で認められていなかった自分が三流画家などではないとを世に知らしめるために本気になって描いたが，これがうまく売りさばけると味をしめて，他の作では適当に手をぬいたのだろう，と主張した．

しかし，決定的な科学的証拠がなければ，偽作説を受け入れない人々の意見を変えることはできなかった．

そのような決定的な科学的な証拠は，1967 年になって，やっと，カーネギーメロン大学（アメリカ，ピッツバーク／オハイオ）の科学者たちによって得られている．

ここで用いられたのが，放射性物質による年代測定であった．

フェルメールの偽作

これに対して，調査委員会は，ファン・メーヘレンは『エマオのキリストと使徒たち』を描いたときには，芸術界で認められていなかった自分が三流画家などではないとを世に知らしめるために本気になって描いたが，これがうまく売りさばけると味をしめて，他の作では適当に手をぬいたのだろう，と主張した．

しかし，決定的な科学的証拠がなければ，偽作説を受け入れない人々の意見を変えることはできなかった．

そのような決定的な科学的な証拠は，1967 年になって，やっと，カーネギーメロン大学（アメリカ，ピッツバーク／オハイオ）の科学者たちによって得られている．

ここで用いられたのが，放射性物質による年代測定 であった．

終