

数 理 科 学

2008 年秋学期@中部大学

Sakaé Fuchino (湊野 昌)

中部大学 (Chubu Univ.)

`fuchino@isc.chubu.ac.jp`

`http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/`

2008 年 12 月 18 日 (第 13 回目) の講義 (January 10, 2009 (09:30) 版)

このスライドは $\text{\LaTeX}$ + beamer class で作成しています.



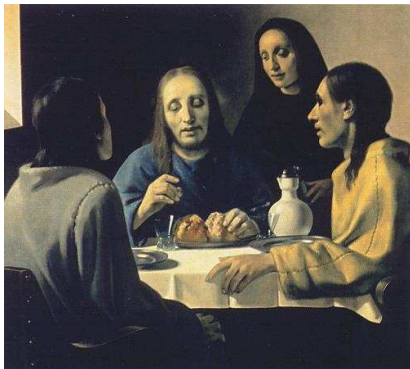
フェルメール (Johannes Vermeer, 1632 年 (寛永 9 年) - 1675 年 (延宝 3 年)):

『真珠の耳飾りの少女』 (1665 年頃)

- [1] M.Braun, *Differential Equations and Their Applications*, Springer (1978).

- [2] [1] の日本語訳:
微分方程式—その数学と応用 (上/下), M. ブラウン (著),
一楽 重雄, 河原 雅子, 河原 正治, 一楽 様子 (翻訳), シュプ
リンガー・フェアラク東京 (2001/03).

- [3] Wikipedia: フェルメール, ハン・ファン・メーヘレン の各項
目の英語版



ハン・ファン・メーヘレン (Han van Meegeren、1889 年 (明治 22 年) - 1947 年 (昭和 22 年))

『エマオのキリストと使徒たち』(Wikipedia にリンクされた画像ファイル)

放射性物質による年代測定 数理科学・微分方程式と年代測定 (5/14)

絵の具に含まれる鉛の同位元素 鉛₂₁₀ は、絵の具がキャンバスに固定されると（自然のサイクルから隔離されるので）核分裂により減少してゆく。

したがって、この含有量を調べることで絵が描かれてからの時間が推定できる。

$N(t)$ で、絵が描かれてから時間 t がたったときの 鉛₂₁₀ の含有量をあらわすことにする。核分裂は連鎖反応的におこるので、 $N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度は $N(t)$ に比例する。

この比例定数を $-\lambda$ とする（ $N(t)$ は時間とともに減少するので、速度は負の数になることに注意）。 $N(t)$ の時刻 t における（瞬

間）変化速度を $\frac{dN(t)}{dt}$ と書くと、
$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度を $\frac{dN(t)}{dt}$ と書くと，

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

このようなタイプの方程式を **微分方程式** とよぶ．これまでの方程式が，変数が未知の数を表していたのに対し，微分方程式の未知変数 N は関数を表すことに注意する．

時刻 0（つまり絵が描かれた時刻）の鉛₂₁₀ の含有率を N_0 とする． $N(0) = N_0$ である（初期条件）．

上の 2 つの式を満たす関数 $N(t)$ は一意に求まる：

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

変量（変数） t の値につれて値の変化するものを 関数 とよぶ.

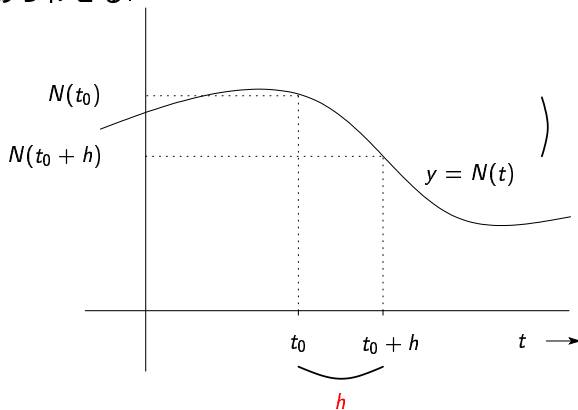
関数という名称の由来: 関数は昔は“函数”とも書いた. 関数のもとの言葉は, (英語では) function だが, 「函数」は中国で作られた訳語で, 中国語読みは“function”に非常に近いものになる, ということである.

N という名前の関数の変数が t のとき, これを $N(t)$ とあらわす. たとえば, 自動販売機はコインを入れると, 商品を出したり, おつりを出したりするが, 上の関数とのアナロジーでは, 自動販売機は, 挿入するコインの関数で, その返してくる値は, 商品を出したりおつりを出したりという動作である.

$N(t)$ という書き方のカッコは, 自動販売機のコインを挿入するスロット (穴) の表示のようなものと言える.

ここでの応用例の $N(t)$ では t は時間をあらわすから, 関数 $N(t)$ のここでのイメージは, 時間 t が変化するにつれて値 $N(t)$ (同位元素の数) が変化してゆく, というようなものになる.

「関数 $N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度を $\frac{dN(t)}{dt}$ と書く」と言ったが，“（瞬間）変化速度”をどうとらえればいいのかを考えてみる．関数 $N(t)$ の変数 t が t_0 から $t_0 + h$ まで変化したときの $N(t)$ の値の（平均）変化速度は、 $\frac{N(t_0 + h) - N(t_0)}{h}$ とあらわせる．



関数 $N(t)$ の変数 t が t_0 から $t_0 + h$ まで変化したときの $N(t)$ の値の（平均）変化速度は、 $\frac{N(t_0 + h) - N(t_0)}{h}$ とあらせる。

h をどんどん 0 に近づけるとき、この値がどんどん近づいてゆく先（極限 limit） $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(t_0 + h) - N(t_0)}{h}$ を $N(t)$ の時刻 t_0 での瞬間速度と考えてよい。

各時刻 t に対して、 $N(t)$ のその時刻での（この意味での）瞬間速度を返す関数を $N(t)$ の微分、または、 $N(t)$ の導関数とよび、 $\frac{dN(t)}{dt}$ とあらわす。（文字 d は differential（微差）からのものじり）

$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$ と, 初期条件 $N(0) = N_0$ を満たす関数

$N(t)$ は $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ に一意に決まると言ったが, この最後の式についてさらに説明を加える.

関数をあらわしている式での N_0 という定数は, この解が $N(0) = N_0$ という要請を満たす必要から付け加えられているものである.

e は, 定数 π と同じように重要な役割をはたす定数である.

$$\pi = 3.141592653589793 \dots$$

$$e = 2.718281828459045 \dots$$

e は π と同様, 無理数で, どんな有理数を係数とする方程式の解にもなっていない (つまり超越数である) ことが知られている (これに対し, $\sqrt{2}$ は無理数だが, $x^2 - 2 = 0$ の解なので超越数でない)

a を正の実数として, x を実数とする (負でもよい) とき, a^x で a の x 乗をあらわす.

x が正の自然数 ($x = 1, 2, 3, \dots$) のときには,

$$a^x = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x \text{ 回}}$$

である.

自然数の範囲での a^x は, 次の 3 つの性質を満たす:

$$\textcircled{1} a^1 = a \quad \textcircled{2} a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \textcircled{3} a^{xy} = (a^x)^y$$

$$\textcircled{2}: a^{x+y} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x+y \text{ 回}} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x \text{ 回}} \cdot \underbrace{a \times \cdots \times a}_{y \text{ 回}} = a^x \cdot a^y$$

$$\textcircled{3}: a^{xy} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{xy \text{ 回}} = \underbrace{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{x \text{ 回}} \times \cdots \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x \text{ 回}}}_{y \text{ 回}} = (a^x)^y$$

指数関数

- 1 $a^0 = 1$
- 2 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, ただし m, n は正の整数
- 3 $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, ただし m, n は正の整数

とすると, a^x は ①, ②, ③ を満たすように, 有理数 (分数であらわせる数) の全体に拡張できるが, この拡張は ①, ②, ③ を満たす a^x の有理数 x への唯一の拡張である.

さらに任意の（有理数とは限らない）実数 x に対する a^x を、 x にどんどん近づいてゆく有理数列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ を選んでおき、有理数に対する a^x の定義を使って

- 4 $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$

と定義できる（特に、この定義による a^x の値は x にどんどん近づいてゆく有理数列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ の選び方によらない）。この定義は、自然数上の a^x の、 $\odot 1, \odot 2, \odot 3$ を満たし、なめらかに値が変化する（つまり連続的である）ような唯一の拡張となっている。前出の $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ での $e^{-\lambda t}$ は、ここでの a^x で a を e , x を $-\lambda t$ としたものである。

経過時間の算出

$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$ と, 初期条件 $N(0) = N_0$ を満たす関数

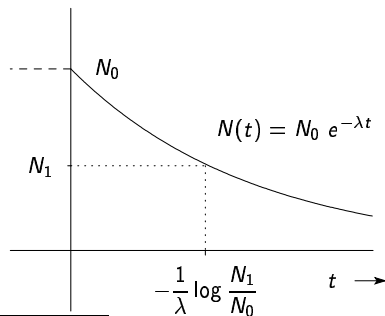
$N(t)$ は $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ に一意に決まる.

現在の時刻 (つまり絵が描かれてから経った時間) を t_1 として現在の鉛₂₁₀ の含有率を N_1 とすると, $N(t_1) = N_1$ だから, 上の式から,

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda t_1}$$

これを t_1 について解くと,

$$t_1 = -\frac{1}{\lambda} \log \frac{N_1}{N_0}$$



問題点: 鉛₂₁₀ では N_0 が決定できない.

終