数 理 科 学

2008 年秋学期@中部大学

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp

http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

2008 年 12 月 18 日（第 13 回目）の講義 (January 10, 2009 (09:34) 版)

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

フェルメールの偽作

フェルメール (Johannes Vermeer, 1632 年（寛永 9 年）- 1675 年（延宝 3 年）):
『真珠の耳飾りの少女』 (1665 年頃)

参考文献

[1] M.Braun, *Differential Equations and Their Applications*, Springer (1978).

[2] [1] の日本語訳:
微分方程式—その数学と応用 （上/下）， M. ブラウン (著), 一楽 重雄, 河原 雅子, 河原 正治, 一楽 祥子 (翻訳), シュプリンガー・フェアラーク東京 (2001/03).

[3] Wikipedia: フェルメール, ハン・ファン・メーヘレン の各項目の英語版

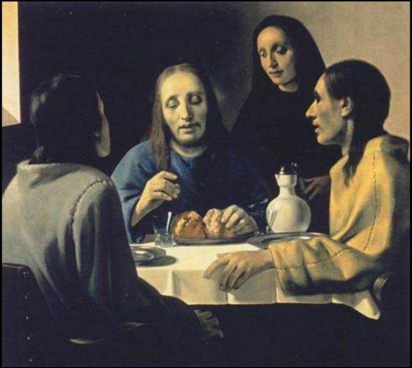
参考文献

[1] M.Braun, *Differential Equations and Their Applications*, Springer (1978).

[2] [1] の日本語訳:
微分方程式—その数学と応用 （上/下）， M. ブラウン (著), 一楽 重雄, 河原 雅子, 河原 正治, 一楽 祥子 (翻訳), シュプリンガー・フェアラーク東京 (2001/03).

[3] Wikipedia: フェルメール, ハン・ファン・メーヘレン の各項目の英語版

フェルメールの偽作



ハン・ファン・メーヘレン（Han van Meegeren、1889 年（明治 22 年）- 1947 年（昭和 22 年））
『エマオのキリストと使徒たち』（Wikipedia にリンクされた画像ファイル）

絵の具に含まれる鉛の同位元素 鉛$_{210}$ は，絵の具がキャンバスに固定されると（自然のサイクルから隔離されるので）核分裂により減少してゆく．

したがって，この含有量を調べることで絵が描かれてからの時間が推定できる．

$N(t)$ で，絵が描かれてから時間 t がたったときの 鉛$_{210}$ の含有量をあらわすことにする．核分裂は連鎖反応的におこるので，$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度は $N(t)$ に比例する．

この比例定数を $-\lambda$ とする（$N(t)$ は時間とともに減少するので，速度は負の数になることに注意）．$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度を $\dfrac{dN(t)}{dt}$ と書くと，

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)}$$

絵の具に含まれる鉛の同位元素 鉛$_{210}$ は，絵の具がキャンバスに固定されると（自然のサイクルから隔離されるので）核分裂により減少してゆく．

したがって，この含有量を調べることで絵が描かれてからの時間が推定できる．

$N(t)$ で，絵が描かれてから時間 t がたったときの 鉛$_{210}$ の含有量をあらわすことにする．核分裂は連鎖反応的におこるので，$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度は $N(t)$ に比例する．

この比例定数を $-\lambda$ とする（$N(t)$ は時間とともに減少するので，速度は負の数になることに注意）．$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度を $\dfrac{dN(t)}{dt}$ と書くと，

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)}$$

放射性物質による年代測定

絵の具に含まれる鉛の同位元素 鉛$_{210}$ は，絵の具がキャンバスに固定されると（自然のサイクルから隔離されるので）核分裂により減少してゆく.

したがって，この含有量を調べることで絵が描かれてからの時間が推定できる.

$N(t)$ で，絵が描かれてから時間 t がたったときの 鉛$_{210}$ の含有量をあらわすことにする．核分裂は連鎖反応的におこるので，$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度は $N(t)$ に比例する.

この比例定数を $-\lambda$ とする（$N(t)$ は時間とともに減少するので，速度は負の数になることに注意）．$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度を $\dfrac{dN(t)}{dt}$ と書くと，

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)}$$

絵の具に含まれる鉛の同位元素 鉛$_{210}$ は，絵の具がキャンバスに固定されると（自然のサイクルから隔離されるので）核分裂により減少してゆく．

したがって，この含有量を調べることで絵が描かれてからの時間が推定できる．

$N(t)$ で，絵が描かれてから時間 t がたったときの 鉛$_{210}$ の含有量をあらわすことにする．核分裂は連鎖反応的におこるので，$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度は $N(t)$ に比例する．

この比例定数を $-\lambda$ とする（$N(t)$ は時間とともに減少するので，速度は負の数になることに注意）．$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度を $\dfrac{dN(t)}{dt}$ と書くと，

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)}$$

絵の具に含まれる鉛の同位元素 鉛$_{210}$ は，絵の具がキャンバスに固定されると（自然のサイクルから隔離されるので）核分裂により減少してゆく．

したがって，この含有量を調べることで絵が描かれてからの時間が推定できる．

$N(t)$ で，絵が描かれてから時間 t がたったときの 鉛$_{210}$ の含有量をあらわすことにする．核分裂は連鎖反応的におこるので，$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度は $N(t)$ に比例する．

この比例定数を $-\lambda$ とする（$N(t)$ は時間とともに減少するので，速度は負の数になることに注意）．$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度を $\dfrac{dN(t)}{dt}$ と書くと，

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)}$$

微分方程式

$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度を $\dfrac{dN(t)}{dt}$ と書くと,

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)}$$

このようなタイプの方程式を 微分方程式 とよぶ. これまでの方程式が, 変数が未知の数を表していたのに対し, 微分方程式の未知変数 N は関数を表すことに注意する.

時刻 0 （つまり絵か描かれた時刻）の 鉛$_{210}$ の含有率を N_0 とする. $\boxed{N(0) = N_0}$ である（初期条件）.

上の 2 つの式を満たす関数 $N(t)$ は一意に求まる:

$$\boxed{N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}}$$

微分方程式

$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度を $\dfrac{dN(t)}{dt}$ と書くと，

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)}$$

このようなタイプの方程式を 微分方程式 とよぶ． これまでの方程式が， 変数が未知の数を表していたのに対し， 微分方程式の未知変数 N は関数を表すことに注意する．

時刻 0 （つまり絵か描かれた時刻） の 鉛$_{210}$ の含有率を N_0 とする． $\boxed{N(0) = N_0}$ である（初期条件）．

上の 2 つの式を満たす関数 $N(t)$ は一意に求まる:

$$\boxed{N(t) = N_0 \ e^{-\lambda t}}$$

微分方程式

$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度を $\dfrac{dN(t)}{dt}$ と書くと，

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)}$$

このようなタイプの方程式を 微分方程式 とよぶ．これまでの方程式が，変数が未知の数を表していたのに対し，微分方程式の未知変数 N は関数を表すことに注意する．

時刻 0 （つまり絵か描かれた時刻）の 鉛$_{210}$ の含有率を N_0 とする． $\boxed{N(0) = N_0}$ である（初期条件）．

上の 2 つの式を満たす関数 $N(t)$ は一意に求まる:

$$\boxed{N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}}$$

微分方程式

$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度を $\dfrac{dN(t)}{dt}$ と書くと，

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)}$$

このようなタイプの方程式を 微分方程式 とよぶ．これまでの方程式が，変数が未知の数を表していたのに対し，微分方程式の未知変数 N は関数を表すことに注意する．

時刻 0 （つまり絵か描かれた時刻）の 鉛$_{210}$ の含有率を N_0 とする． $\boxed{N(0) = N_0}$ である（初期条件）．

上の 2 つの式を満たす関数 $N(t)$ は一意に求まる:

$$\boxed{N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}}$$

微分方程式

$N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度を $\dfrac{dN(t)}{dt}$ と書くと，

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)}$$

このようなタイプの方程式を 微分方程式 とよぶ． これまでの方程式が，変数が未知の数を表していたのに対し，微分方程式の未知変数 N は関数を表すことに注意する．

時刻 0 （つまり絵か描かれた時刻）の 鉛$_{210}$ の含有率を N_0 とする． $\boxed{N(0) = N_0}$ である（初期条件）．

上の 2 つの式を満たす関数 $N(t)$ は一意に求まる:

$$\boxed{N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}}$$

関数

変量（変数） t の値につれて値の変化するものを 関数 とよぶ.

関数という名称の由来: 関数は昔は “函数” とも書いた. 関数のもとの言葉は,（英語では） function だが,「函数」は中国で作られた訳語で, 中国語読みは “function” に非常に近いものになる, ということである.

N という名前の関数の変数が t のとき, これを $N(t)$ とあらわす. たとえば, 自動販売機はコインを入れると, 商品を出したり, おつりを出したりするが, 上の関数とのアナロジーでは, 自動販売機は, 挿入するコインの関数で, その返してくる値は, 商品を出したりおつりを出したりという動作である.

$N(t)$ という書き方のカッコは, 自動販売機のコインを挿入するスロット（穴）の表示のようなものと言える.

ここでの応用例の $N(t)$ では t は時間をあらわすから, 関数 $N(t)$ のここでのイメージは, 時間 t が変化するにつれて値 $N(t)$ （同位元素の数）が変化してゆく, というようなものになる.

関数

変量（**変数**） t の値につれて値の変化するものを **関数** とよぶ.

関数という名称の由来: 関数は昔は "函数" とも書いた. 関数のもとの言葉は,（英語では） function だが,「函数」は中国で作られた訳語で, 中国語読みは "function" に非常に近いものになる, ということである.

N という名前の関数の変数が t のとき, これを $N(t)$ とあらわす. たとえば, 自動販売機はコインを入れると, 商品を出したり, おつりを出したりするが, 上の関数とのアナロジーでは, 自動販売機は, 挿入するコインの関数で, その返してくる値は, 商品を出したりおつりを出したりという動作である.

$N(t)$ という書き方のカッコは, 自動販売機のコインを挿入するスロット（穴）の表示のようなものと言える.

ここでの応用例の $N(t)$ では t は時間をあらわすから, 関数 $N(t)$ のここでのイメージは, 時間 t が変化するにつれて値 $N(t)$ （同位元素の数）が変化してゆく, というようなものになる.

関数

変量（変数） t の値につれて値の変化するものを 関数 とよぶ.

関数という名称の由来: 関数は昔は “函数” とも書いた. 関数のもとの言葉は,（英語では） function だが,「函数」は中国で作られた訳語で, 中国語読みは “function” に非常に近いものになる, ということである.

N という名前の関数の変数が t のとき, これを $N(t)$ とあらわす. たとえば, 自動販売機はコインを入れると, 商品を出したり, おつりを出したりするが, 上の関数とのアナロジーでは, 自動販売機は, 挿入するコインの関数で, その返してくる値は, 商品を出したりおつりを出したりという動作である.

$N(t)$ という書き方のカッコは, 自動販売機のコインを挿入するスロット（穴）の表示のようなものと言える.

ここでの応用例の $N(t)$ では t は時間をあらわすから, 関数 $N(t)$ のここでのイメージは, 時間 t が変化するにつれて値 $N(t)$ （同位元素の数）が変化してゆく, というようなものになる.

関数

変量（変数） t の値につれて値の変化するものを 関数 とよぶ.

関数という名称の由来: 関数は昔は“函数”とも書いた. 関数のもとの言葉は,（英語では） function だが,「函数」は中国で作られた訳語で, 中国語読みは “function” に非常に近いものになる, ということである.

N という名前の関数の変数が t のとき, これを $N(t)$ とあらわす. たとえば, 自動販売機はコインを入れると, 商品を出したり, おつりを出したりするが, 上の関数とのアナロジーでは, 自動販売機は, 挿入するコインの関数で, その返してくる値は, 商品を出したりおつりを出したりという動作である.

$N(t)$ という書き方のカッコは, 自動販売機のコインを挿入するスロット（穴）の表示のようなものと言える.

ここでの応用例の $N(t)$ では t は時間をあらわすから, 関数 $N(t)$ のここでのイメージは, 時間 t が変化するにつれて値 $N(t)$ （同位元素の数）が変化してゆく, というようなものになる.

関数

変量（変数）t の値につれて値の変化するものを 関数 とよぶ.

関数という名称の由来: 関数は昔は“函数”とも書いた. 関数のもとの言葉は,（英語では） function だが,「函数」は中国で作られた訳語で, 中国語読みは“function”に非常に近いものになる, ということである.

N という名前の関数の変数が t のとき, これを $N(t)$ とあらわす. たとえば, 自動販売機はコインを入れると, 商品を出したり, おつりを出したりするが, 上の関数とのアナロジーでは, 自動販売機は, 挿入するコインの関数で, その返してくる値は, 商品を出したりおつりを出したりという動作である.

$N(t)$ という書き方のカッコは, 自動販売機のコインを挿入するスロット（穴）の表示のようなものと言える.

ここでの応用例の $N(t)$ では t は時間をあらわすから, 関数 $N(t)$ のここでのイメージは, 時間 t が変化するにつれて値 $N(t)$（同位元素の数）が変化してゆく, というようなものになる.

関数

変量（**変数**） t の値につれて値の変化するものを **関数** とよぶ.

関数という名称の由来: 関数は昔は “函数” とも書いた. 関数のもとの言葉は,（英語では） function だが,「函数」は中国で作られた訳語で, 中国語読みは “function” に非常に近いものになる, ということである.

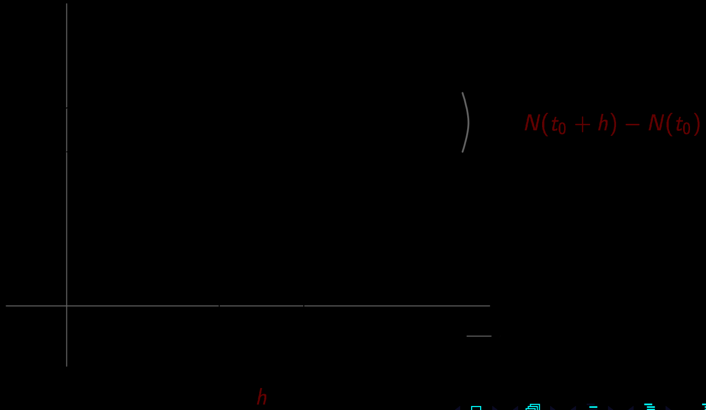
N という名前の関数の変数が t のとき, これを $N(t)$ とあらわす. たとえば, 自動販売機はコインを入れると, 商品を出したり, おつりを出したりするが, 上の関数とのアナロジーでは, 自動販売機は, 挿入するコインの関数で, その返してくる値は, 商品を出したりおつりを出したりという動作である.

$N(t)$ という書き方のカッコは, 自動販売機のコインを挿入するスロット（穴）の表示のようなものと言える.

ここでの応用例の $N(t)$ では t は時間をあらわすから, 関数 $N(t)$ のここでのイメージは, 時間 t が変化するにつれて値 $N(t)$ （同位元素の数）が変化してゆく, というようなものになる.

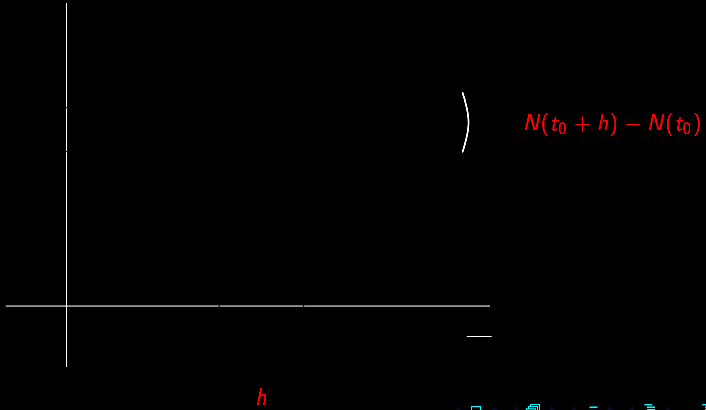
微分と導関数

「関数 $N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度を $\dfrac{dN(t)}{dt}$ と書く」と言ったが，“（瞬間）変化速度” をどうとらえればいいかを考えてみる． 関数 $N(t)$ の変数 t が t_0 から t_0+h まで 変化したときの $N(t)$ の値の（平均）変化速度は，$\dfrac{N(t_0+h)-N(t_0)}{h}$ とあらわせる．



微分と導関数

「関数 $N(t)$ の時刻 t における（瞬間）変化速度を $\dfrac{dN(t)}{dt}$ と書く」 と言ったが，“（瞬間）変化速度” をどうとらえればいいかを考えてみる． 関数 $N(t)$ の変数 t が t_0 から t_0+h まで 変化したときの $N(t)$ の値の（平均）変化速度は， $\dfrac{N(t_0+h)-N(t_0)}{h}$ とあらわせる．



微分と導関数

関数 $N(t)$ の変数 t が t_0 から $t_0 + h$ まで 変化したときの $N(t)$ の値の（平均）変化速度は, $\dfrac{N(t_0+h) - N(t_0)}{h}$ とあらせる.

h をどんどん 0 に近づけるとき, この値がどんどん近づいてゆく先（極限 limit）$\lim_{h \to 0} \dfrac{N(t_0+h) - N(t_0)}{h}$ を $N(t)$ の時刻 t_0 での瞬間速度と考えてよい.

各時刻 t に対して, $N(t)$ のその時刻での（この意味での）瞬間速度を返す関数を $N(t)$ の **微分**, または, $N(t)$ の **導関数** とよび, $\dfrac{dN(t)}{dt}$ とあらわす.（文字 d は differential（微差）からのもじり）

微分と導関数

関数 $N(t)$ の変数 t が t_0 から t_0+h まで 変化したときの $N(t)$ の値の（平均）変化速度は，$\dfrac{N(t_0+h)-N(t_0)}{h}$ とあらせる．

h をどんどん 0 に近づけるとき，この値がどんどん近づいてゆく先（極限 limit）$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{N(t_0+h)-N(t_0)}{h}$ を $N(t)$ の時刻 t_0 での瞬間速度と考えてよい．

各時刻 t に対して，$N(t)$ のその時刻での（この意味での）瞬間速度を返す関数を $N(t)$ の 微分，または，$N(t)$ の 導関数 とよび，$\dfrac{dN(t)}{dt}$ とあらわす．（文字 d は differential（微差）からのもじり）

微分と導関数

関数 $N(t)$ の変数 t が t_0 から t_0+h まで 変化したときの $N(t)$ の値の（平均）変化速度は, $\dfrac{N(t_0+h)-N(t_0)}{h}$ とあらせる.

h をどんどん 0 に近づけるとき, この値がどんどん近づいてゆく先（極限 limit）$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{N(t_0+h)-N(t_0)}{h}$ を $N(t)$ の時刻 t_0 での瞬間速度と考えてよい.

各時刻 t に対して, $N(t)$ のその時刻での（この意味での）瞬間速度を返す関数を $N(t)$ の **微分**, または, $N(t)$ の **導関数** とよび, $\dfrac{dN(t)}{dt}$ とあらわす.（文字 d は differential（微差）からのもじり）

指数関数

$\boxed{\dfrac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)}$ と，初期条件 $\boxed{N(0) = N_0}$ を満たす関数 $N(t)$ は $\boxed{N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}}$ に一意に決まると言ったが，この最後の式についてさらに説明を加える．

関数をあらわしている式での N_0 という定数は，この解が $N(0) = N_0$ という要請を満たす必要から付け加えられているものである．

e は，定数 π と同じように重要な役割をはたす定数である．

$$\pi = 3.141592653589793\cdots$$

$$e = 2.718281828459045\cdots$$

e は π と同様，無理数で，どんな有理数を係数とする方程式の解にもなっていない（つまり超越数である）ことが知られている（これに対し，$\sqrt{2}$ は無理数だが，$x^2 - 2 = 0$ の解なので超越数でない）

指数関数

$\boxed{\dfrac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)}$ と，初期条件 $\boxed{N(0) = N_0}$ を満たす関数 $N(t)$ は $\boxed{N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}}$ に一意に決まると言ったが，この最後の式についてさらに説明を加える．

関数をあらわしている式での N_0 という定数は，この解が $N(0) = N_0$ という要請を満たす必要から付け加えられているものである．

e は，定数 π と同じように重要な役割をはたす定数である．

$$\pi = 3.141592653589793\cdots$$

$$e = 2.718281828459045\cdots$$

e は π と同様，無理数で，どんな有理数を係数とする方程式の解にもなっていない（つまり超越数である）ことが知られている（これに対し，$\sqrt{2}$ は無理数だが，$x^2 - 2 = 0$ の解なので超越数でない）

指数関数

$\dfrac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$ と，初期条件 $N(0) = N_0$ を満たす関数 $N(t)$ は $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ に一意に決まると言ったが，この最後の式についてさらに説明を加える．

関数をあらわしている式での N_0 という定数は，この解が $N(0) = N_0$ という要請を満たす必要から付け加えられているものである．

e は，定数 π と同じように重要な役割をはたす定数である．

$$\pi = 3.141592653589793\cdots$$

$$e = 2.718281828459045\cdots$$

e は π と同様，無理数で，どんな有理数を係数とする方程式の解にもなっていない（つまり超越数である）ことが知られている（これに対し，$\sqrt{2}$ は無理数だが，$x^2 - 2 = 0$ の解なので超越数でない）

指数関数

$\boxed{\dfrac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)}$ と，初期条件 $\boxed{N(0) = N_0}$ を満たす関数 $N(t)$ は $\boxed{N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}}$ に一意に決まると言ったが，この最後の式についてさらに説明を加える．

関数をあらわしている式での N_0 という定数は，この解が $N(0) = N_0$ という要請を満たす必要から付け加えられているものである．

e は，定数 π と同じように重要な役割をはたす定数である．

$$\pi = 3.141592653589793\cdots$$

$$e = 2.718281828459045\cdots$$

e は π と同様，無理数で，どんな有理数を係数とする方程式の解にもなっていない（つまり超越数である）ことが知られている（これに対し，$\sqrt{2}$ は無理数だが，$x^2 - 2 = 0$ の解なので超越数でない）

指数関数

$\boxed{\dfrac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)}$ と，初期条件 $\boxed{N(0) = N_0}$ を満たす関数 $N(t)$ は $\boxed{N(t) = N_0 \ e^{-\lambda t}}$ に一意に決まると言ったが，この最後の式についてさらに説明を加える.

関数をあらわしている式での N_0 という定数は，この解が $N(0) = N_0$ という要請を満たす必要から付け加えられているものである.

e は，定数 π と同じように重要な役割をはたす定数である.

$$\pi = 3.141592653589793\cdots$$

$$e = 2.718281828459045\cdots$$

e は π と同様，無理数で，どんな有理数を係数とする方程式の解にもなっていない（つまり超越数である）ことが知られている（これに対し，$\sqrt{2}$ は無理数だが，$x^2 - 2 = 0$ の解なので超越数でない）

指数関数

a を正の実数として，x を実数とする（負でもよい）とき，a^x で a の x 乗をあらわす．

x が正の自然数（$x = 1, 2, 3, \cdots$）のときには，

$$a^x = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x \text{ 回}}$$

である．
自然数の範囲での a^x は，次の 3 つの性質を満たす:

◎ 1 $a^1 = a$　◎ 2 $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$　◎ 3 $a^{xy} = (a^x)^y$

◎ 2: $a^{x+y} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x+y \text{ 回}} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x \text{ 回}} \cdot \underbrace{a \times \cdots \times a}_{y \text{ 回}} = a^x \cdot a^y$

◎ 3: $a^{xy} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{xy \text{ 回}} = \underbrace{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{x \text{ 回}} \times \cdots \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x \text{ 回}}}_{y \text{ 回}} = (a^x)^y$

指数関数

a を正の実数として，x を実数とする（負でもよい）とき，a^x で a の x 乗をあらわす．

x が正の自然数（$x = 1, 2, 3, \cdots$）のときには，

$$a^x = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x \text{ 回}}$$

である．

自然数の範囲での a^x は，次の 3 つの性質を満たす:

◎ 1 $a^1 = a$ ◎ 2 $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ◎ 3 $a^{xy} = (a^x)^y$

◎ 2: $a^{x+y} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x+y \text{ 回}} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x \text{ 回}} \cdot \underbrace{a \times \cdots \times a}_{y \text{ 回}} = a^x \cdot a^y$

◎ 3: $a^{xy} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{xy \text{ 回}} = \underbrace{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{x \text{ 回}} \times \cdots \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x \text{ 回}}}_{y \text{ 回}} = (a^x)^y$

指数関数

a を正の実数として，x を実数とする（負でもよい）とき，a^x で a の x 乗をあらわす．

x が正の自然数（$x = 1, 2, 3, \cdots$）のときには，

$$a^x = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\text{ 回}}$$

である．

自然数の範囲での a^x は，次の 3 つの性質を満たす:

◎ 1 $a^1 = a$　◎ 2 $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$　◎ 3 $a^{xy} = (a^x)^y$

◎ 2: $a^{x+y} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x+y\text{ 回}} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\text{ 回}} \cdot \underbrace{a \times \cdots \times a}_{y\text{ 回}} = a^x \cdot a^y$

◎ 3: $a^{xy} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{xy\text{ 回}} = \underbrace{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\text{ 回}} \times \cdots \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\text{ 回}}}_{y\text{ 回}} = (a^x)^y$

指数関数

a を正の実数として，x を実数とする（負でもよい）とき，a^x で a の x 乗をあらわす．

x が正の自然数（$x = 1, 2, 3, \cdots$）のときには，

$$a^x = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\,回}$$

である．

自然数の範囲での a^x は，次の 3 つの性質を満たす:

◎ 1 $a^1 = a$ ◎ 2 $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ◎ 3 $a^{xy} = (a^x)^y$

◎ 2: $a^{x+y} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x+y\,回} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\,回} \cdot \underbrace{a \times \cdots \times a}_{y\,回} = a^x \cdot a^y$

◎ 3: $a^{xy} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{xy\,回} = \underbrace{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\,回} \times \cdots \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\,回}}_{y\,回} = (a^x)^y$

指数関数

a を正の実数として，x を実数とする（負でもよい）とき，a^x で a の x 乗をあらわす．

x が正の自然数（$x = 1, 2, 3, \cdots$）のときには，

$$a^x = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\ 回}$$

である．

自然数の範囲での a^x は，次の 3 つの性質を満たす:

◎ 1 $a^1 = a$ ◎ 2 $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ◎ 3 $a^{xy} = (a^x)^y$

◎ 2: $a^{x+y} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x+y\ 回} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\ 回} \cdot \underbrace{a \times \cdots \times a}_{y\ 回} = a^x \cdot a^y$

◎ 3: $a^{xy} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{xy\ 回} = \underbrace{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\ 回} \times \cdots \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\ 回}}_{y\ 回} = (a^x)^y$

指数関数

a を正の実数として，x を実数とする（負でもよい）とき，a^x で a の x 乗をあらわす．

x が正の自然数（$x = 1, 2, 3, \cdots$）のときには，

$$a^x = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\ 回}$$

である．
自然数の範囲での a^x は，次の 3 つの性質を満たす:

◎ 1 $a^1 = a$　◎ 2 $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$　◎ 3 $a^{xy} = (a^x)^y$

◎ 2: $a^{x+y} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x+y\ 回} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\ 回} \cdot \underbrace{a \times \cdots \times a}_{y\ 回} = a^x \cdot a^y$

◎ 3: $a^{xy} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{xy\ 回} = \underbrace{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\ 回} \times \cdots \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{x\ 回}}_{y\ 回} = (a^x)^y$

指数関数

- 1 $a^0 = 1$
- 2 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, ただし m, n は正の整数
- 3 $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, ただし m, n は正の整数

とすると, a^x は◎ 1, ◎ 2, ◎ 3 を満たすように, 有理数（分数であらわせる数）の全体に拡張できるが, この拡張は◎ 1, ◎ 2, ◎ 3 を満たす a^x の有理数 x への唯一の拡張である.

さらに任意の（有理数とは限らない）実数 x に対する a^x を, x にどんどん近づいてゆく有理数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ を選んでおき, 有理数に対する a^x の定義を使って

- 4 $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$

と定義できる（特に, この定義による a^x の値は x にどんどん近づいてゆく有理数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$の選び方によらない）. この定義は, 自然数上の a^x の, ◎ 1, ◎ 2, ◎ 3 を満たし, なめらかに値が変化する（つまり連続的である）ような唯一の拡張となっている. 前出の $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ での $e^{-\lambda t}$ は, ここでの a^x で a を e, x を $-\lambda t$ としたものである.

指数関数

- ◎1 $a^0 = 1$
- ◎2 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, ただし m, n は正の整数
- ◎3 $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, ただし m, n は正の整数

とすると, a^x は◎1, ◎2, ◎3を満たすように, 有理数（分数であらわせる数）の全体に拡張できるが, この拡張は◎1, ◎2, ◎3を満たす a^x の有理数 x への唯一の拡張である.

さらに任意の（有理数とは限らない）実数 x に対する a^x を, x にどんどん近づいてゆく有理数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ を選んでおき, 有理数に対する a^x の定義を使って

- ◎4 $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$

と定義できる（特に, この定義による a^x の値は x にどんどん近づいてゆく有理数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$の選び方によらない）. この定義は, 自然数上の a^x の, ◎1, ◎2, ◎3を満たし, なめらかに値が変化する（つまり連続的である）ような唯一の拡張となっている. 前出の $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ での $e^{-\lambda t}$ は, ここでの a^x で a を e, x を $-\lambda t$ としたものである.

指数関数

- ◎1 $a^0 = 1$
- ◎2 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, ただし m, n は正の整数
- ◎3 $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, ただし m, n は正の整数

とすると，a^x は◎1，◎2，◎3 を満たすように，有理数（分数であらわせる数）の全体に拡張できるが，この拡張は◎1，◎2，◎3 を満たす a^x の有理数 x への唯一の拡張である．

さらに任意の（有理数とは限らない）実数 x に対する a^x を，x にどんどん近づいてゆく有理数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ を選んでおき，有理数に対する a^x の定義を使って

- ◎4 $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$

と定義できる（特に，この定義による a^x の値は x にどんどん近づいてゆく有理数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$の選び方によらない）．この定義は，自然数上の a^x の，◎1，◎2，◎3 を満たし，なめらかに値が変化する（つまり連続的である）ような唯一の拡張となっている． 前出の $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ での $e^{-\lambda t}$ は，ここでの a^x で a を e, x を $-\lambda t$ としたものである．

指数関数

- 1 $a^0 = 1$
- 2 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$,　ただし m, n は正の整数
- 3 $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$,　ただし m, n は正の整数

とすると，a^x は◎ 1, ◎ 2, ◎ 3 を満たすように，有理数（分数であらわせる数）の全体に拡張できるが，この拡張は◎ 1, ◎ 2, ◎ 3 を満たす a^x の有理数 x への唯一の拡張である．

さらに任意の（有理数とは限らない）実数 x に対する a^x を，x にどんどん近づいてゆく有理数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ を選んでおき，有理数に対する a^x の定義を使って

- 4 $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$

と定義できる（特に，この定義による a^x の値は x にどんどん近づいてゆく有理数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ の選び方によらない）．この定義は，自然数上の a^x の，◎ 1, ◎ 2, ◎ 3 を満たし，なめらかに値が変化する（つまり連続的である）ような唯一の拡張となっている．　前出の $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ での $e^{-\lambda t}$ は，ここでの a^x で a を e, x を $-\lambda t$ としたものである．

指数関数

- 1 $a^0 = 1$
- 2 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, ただし m, n は正の整数
- 3 $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, ただし m, n は正の整数

とすると, a^x は◎ 1, ◎ 2, ◎ 3 を満たすように, 有理数（分数であらわせる数）の全体に拡張できるが, この拡張は◎ 1, ◎ 2, ◎ 3 を満たす a^x の有理数 x への唯一の拡張である.

さらに任意の（有理数とは限らない）実数 x に対する a^x を, x にどんどん近づいてゆく有理数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ を選んでおき, 有理数に対する a^x の定義を使って

- 4 $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$

と定義できる（特に, この定義による a^x の値は x にどんどん近づいてゆく有理数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$の選び方によらない）. この定義は, 自然数上の a^x の, ◎ 1, ◎ 2, ◎ 3 を満たし, なめらかに値が変化する（つまり連続的である）ような唯一の拡張となっている. 前出の $\boxed{N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}}$ での $e^{-\lambda t}$ は, ここでの a^x で a を e, x を $-\lambda t$ としたものである.

経過時間の算出

$\dfrac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$ と，初期条件 $N(0) = N_0$ を満たす関数

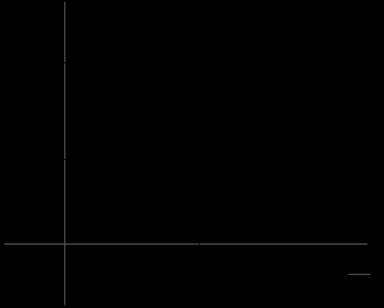
$N(t)$ は $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ に一意に決まる．

現在の時刻（つまり絵が描かれてから経った時間）を t_1 として
現在の 鉛$_{210}$ の含有率を N_1 とすると，$N(t_1) = N_1$ だから，上の式から，

$$N_1 = N_0\ e^{-\lambda t_1}$$

これを t_1 について解くと，

$$t_1 = -\frac{1}{\lambda} \log \frac{N_1}{N_0}$$



問題点: 鉛 $_{210}$ では N_0 が決定できない．

経過時間の算出

$\dfrac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$ と，初期条件 $N(0) = N_0$ を満たす関数 $N(t)$ は $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ に一意に決まる.

現在の時刻（つまり絵が描かれてから経った時間）を t_1 として現在の 鉛$_{210}$ の含有率を N_1 とすると，$N(t_1) = N_1$ だから，上の式から，

$$N_1 = N_0\ e^{-\lambda t_1}$$

これを t_1 について解くと，

$$t_1 = -\frac{1}{\lambda} \log \frac{N_1}{N_0}$$

問題点: 鉛 $_{210}$ では N_0 が決定できない.

経過時間の算出

$\dfrac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$ と，初期条件 $N(0) = N_0$ を満たす関数 $N(t)$ は $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ に一意に決まる．

現在の時刻（つまり絵が描かれてから経った時間）を t_1 として現在の 鉛$_{210}$ の含有率を N_1 とすると，$N(t_1) = N_1$ だから，上の式から，

$$N_1 = N_0\ e^{-\lambda t_1}$$

これを t_1 について解くと，

$$t_1 = -\frac{1}{\lambda} \log \frac{N_1}{N_0}$$

問題点: 鉛 $_{210}$ では N_0 が決定できない．

経過時間の算出

$\dfrac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$ と，初期条件 $N(0) = N_0$ を満たす関数

$N(t)$ は $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ に一意に決まる．

現在の時刻（つまり絵が描かれてから経った時間）を t_1 として
現在の 鉛$_{210}$ の含有率を N_1 とすると，$N(t_1) = N_1$ だから，上の式から，

$$N_1 = N_0\ e^{-\lambda t_1}$$

これを t_1 について解くと，

$$t_1 = -\frac{1}{\lambda} \log \frac{N_1}{N_0}$$

問題点：鉛 $_{210}$ では N_0 が決定できない．

経過時間の算出

$\dfrac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$ と，初期条件 $N(0) = N_0$ を満たす関数

$N(t)$ は $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ に一意に決まる.

現在の時刻（つまり絵が描かれてから経った時間）を t_1 として
現在の 鉛$_{210}$ の含有率を N_1 とすると，$N(t_1) = N_1$ だから，上の式から，

$$N_1 = N_0\ e^{-\lambda t_1}$$

これを t_1 について解くと，

$$t_1 = -\frac{1}{\lambda} \log \frac{N_1}{N_0}$$

問題点: 鉛 $_{210}$ では N_0 が決定できない.

終