数 理 科 学

2008 年秋学期@中部大学

Sakaé Fuchino　（渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp

http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

2009 年 1 月 15 日（第 15 回目）の講義 (January 19, 2009 (01:49) 版)

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

年代測定

ある放射性物質の自然崩壊の様子を解析する．ただし，回りの環境からの，この物質の補給はないものとする．時刻 t におけるこの物質の量を $N(t)$ であらわし，自然崩壊の速度がこの放射性物質の量に比例することを微分方程式で表すと:

$$(1)\quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

となり，時刻 0 にこの物質の量が N_0 であった，という条件は，

$$(2)\quad N(0) = N_0$$

とあらわせる．

(1), (2) を満たす関数は，ただ一つに決まり，それは

$$(3)\quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

とあらわされる．

年代測定

ある放射性物質の自然崩壊の様子を解析する．ただし，回りの環境からの，この物質の補給はないものとする．時刻 t におけるこの物質の量を $N(t)$ であらわし，自然崩壊の速度がこの放射性物質の量に比例することを微分方程式で表すと:

$$(1)\quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

となり，時刻 0 にこの物質の量が N_0 であった，という条件は，

$$(2)\quad N(0) = N_0$$

とあらわせる．

(1), (2) を満たす関数は，ただ一つに決まり，それは

$$(3)\quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

とあらわされる．

年代測定

ある放射性物質の自然崩壊の様子を解析する．ただし，回りの環境からの，この物質の補給はないものとする．時刻 t におけるこの物質の量を $N(t)$ であらわし，自然崩壊の速度がこの放射性物質の量に比例することを微分方程式で表すと:

$$(1)\quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

となり，時刻 0 にこの物質の量が N_0 であった，という条件は，

$$(2)\quad N(0) = N_0$$

とあらわせる．

(1), (2) を満たす関数は，ただ一つに決まり，それは

$$(3)\quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

とあらわされる．

年代測定

ある放射性物質の自然崩壊の様子を解析する．ただし，回りの環境からの，この物質の補給はないものとする．時刻 t におけるこの物質の量を $N(t)$ であらわし，自然崩壊の速度がこの放射性物質の量に比例することを微分方程式で表すと:

$$(1)\quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

となり，時刻 0 にこの物質の量が N_0 であった，という条件は，

$$(2)\quad N(0) = N_0$$

とあらわせる．

(1), (2) を満たす関数は，ただ一つに決まり，それは

$$(3)\quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

とあらわされる．

年代測定

ある放射性物質の自然崩壊の様子を解析する．ただし，回りの環境からの，この物質の補給はないものとする．時刻 t におけるこの物質の量を $N(t)$ であらわし，自然崩壊の速度がこの放射性物質の量に比例することを微分方程式で表すと:

$$(1)\quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

となり，時刻 0 にこの物質の量が N_0 であった，という条件は，

$$(2)\quad N(0) = N_0$$

とあらわせる．

(1), (2) を満たす関数は，ただ一つに決まり，それは

$$(3)\quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

とあらわされる．

半減期

前ページの (3) 式での，$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ の形の関数の特徴の一つに，どの時刻から出発しても，ある一定の時間がたつと値が半分になる，という性質がある．今，時刻 $t+h$ での $N(t)$ の値が時刻 t での値の半分になっている，ということをあらわしている式 $N(t+h) = \frac{1}{2}N(t)$ を考える，つまり，$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$ だが，これを h について解くと，

$$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda h} = \frac{1}{2}$ （両辺に $\frac{1}{N_0}e^{\lambda t}$ をかける）

$\Leftrightarrow e^{\lambda h} = 2$ (両辺の逆数をとる)

$\Leftrightarrow \lambda h = \log(2)$ (両辺の $\log$ をとる)

$\Leftrightarrow h = \frac{\log(2)}{\lambda}$

となり，h の値は t に依存しないことが確かめられる．この h を $N(t)$ の **半減期** とよぶ．上の式から，

(4) $\lambda = \frac{\log(2)}{h}$

である．

半減期

前ページの (3) 式での，$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ の形の関数の特徴の一つに，どの時刻から出発しても，ある一定の時間がたつと値が半分になる，という性質がある．今，時刻 $t+h$ での $N(t)$ の値が時刻 t での値の半分になっている，ということをあらわしている式 $N(t+h) = \frac{1}{2}N(t)$ を考える．つまり，$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$ だが，これを h について解くと，

$$
\begin{aligned}
& N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t} \\
\Leftrightarrow\ & e^{-\lambda h} = \frac{1}{2} \quad \text{（両辺に } \frac{1}{N_0}e^{\lambda t} \text{ をかける）} \\
\Leftrightarrow\ & e^{\lambda h} = 2 \ \text{(両辺の逆数をとる)} \\
\Leftrightarrow\ & \lambda h = \log(2) \ \text{(両辺の log をとる)} \\
\Leftrightarrow\ & h = \frac{\log(2)}{\lambda}
\end{aligned}
$$

となり，h の値は t に依存しないことが確かめられる．この h を $N(t)$ の **半減期** とよぶ．上の式から，

$$(4) \quad \lambda = \frac{\log(2)}{h}$$

である．

半減期

前ページの (3) 式での，$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ の形の関数の特徴の一つに，どの時刻から出発しても，ある一定の時間がたつと値が半分になる，という性質がある．今，時刻 $t + h$ での $N(t)$ の値が時刻 t での値の半分になっている，ということをあらわしている式 $N(t + h) = \frac{1}{2} N(t)$ を考える，つまり，$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2} N_0 e^{-\lambda t}$ だが，これを h について解くと，

$$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2} N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda h} = \frac{1}{2} \quad \text{（両辺に } \tfrac{1}{N_0} e^{\lambda t} \text{ をかける）}$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda h} = 2 \text{ (両辺の逆数をとる)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda h = \log(2) \text{ (両辺の log をとる)}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\log(2)}{\lambda}$$

となり，h の値は t に依存しないことが確かめられる．この h を $N(t)$ の **半減期** とよぶ．上の式から，

$$(4) \quad \lambda = \frac{\log(2)}{h}$$

である．

半減期

前ページの (3) 式での，$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ の形の関数の特徴の一つに，どの時刻から出発しても，ある一定の時間がたつと値が半分になる，という性質がある．今，時刻 $t+h$ での $N(t)$ の値が時刻 t での値の半分になっている，ということをあらわしている式 $N(t+h) = \frac{1}{2}N(t)$ を考える．つまり，$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$ だが，これを h について解くと，

$$
\begin{aligned}
& N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \tfrac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t} \\
\Leftrightarrow\ & e^{-\lambda h} = \tfrac{1}{2} \quad \text{（両辺に } \tfrac{1}{N_0}e^{\lambda t} \text{ をかける）} \\
\Leftrightarrow\ & e^{\lambda h} = 2 \ \text{(両辺の逆数をとる)} \\
\Leftrightarrow\ & \lambda h = \log(2) \ \text{(両辺の } \log \text{ をとる)} \\
\Leftrightarrow\ & h = \frac{\log(2)}{\lambda}
\end{aligned}
$$

となり，h の値は t に依存しないことが確かめられる．この h を $N(t)$ の **半減期** とよぶ．上の式から，

$$
(4)\quad \lambda = \frac{\log(2)}{h}
$$

である．

半減期

前ページの (3) 式での，$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ の形の関数の特徴の一つに，どの時刻から出発しても，ある一定の時間がたつと値が半分になる，という性質がある．今，時刻 $t+h$ での $N(t)$ の値が時刻 t での値の半分になっている，ということをあらわしている式 $N(t+h) = \frac{1}{2}N(t)$ を考える，つまり，$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$ だが，これを h について解くと，

$$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda h} = \frac{1}{2} \quad (\text{両辺に } \tfrac{1}{N_0}e^{\lambda t} \text{ をかける})$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda h} = 2 \ (\text{両辺の逆数をとる})$$

$$\Leftrightarrow \lambda h = \log(2) \ (\text{両辺の } \log \text{ をとる})$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\log(2)}{\lambda}$$

となり，h の値は t に依存しないことが確かめられる．この h を $N(t)$ の **半減期** とよぶ．上の式から，

$$(4) \quad \lambda = \frac{\log(2)}{h}$$

である．

半減期

前ページの (3) 式での，$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ の形の関数の特徴の一つに，どの時刻から出発しても，ある一定の時間がたつと値が半分になる，という性質がある．今，時刻 $t+h$ での $N(t)$ の値が時刻 t での値の半分になっている，ということをあらわしている式 $N(t+h) = \frac{1}{2}N(t)$ を考える，つまり，$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$ だが，これを h について解くと，

$$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda h} = \frac{1}{2} \quad \text{（両辺に } \tfrac{1}{N_0}e^{\lambda t} \text{ をかける）}$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda h} = 2 \ \text{(両辺の逆数をとる)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda h = \log(2) \ \text{(両辺の log をとる)}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\log(2)}{\lambda}$$

となり，h の値は t に依存しないことが確かめられる．この h を $N(t)$ の **半減期** とよぶ．上の式から，

$$(4) \quad \lambda = \frac{\log(2)}{h}$$

である．

半減期

前ページの (3) 式での，$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ の形の関数の特徴の一つに，どの時刻から出発しても，ある一定の時間がたつと値が半分になる，という性質がある．今，時刻 $t+h$ での $N(t)$ の値が時刻 t での値の半分になっている，ということをあらわしている式 $N(t+h) = \frac{1}{2}N(t)$ を考える，つまり，$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$ だが，これを h について解くと，

$$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow\ e^{-\lambda h} = \frac{1}{2} \quad \text{（両辺に } \frac{1}{N_0}e^{\lambda t} \text{ をかける）}$$

$$\Leftrightarrow\ e^{\lambda h} = 2 \ \text{(両辺の逆数をとる)}$$

$$\Leftrightarrow\ \lambda h = \log(2) \ \text{(両辺の log をとる)}$$

$$\Leftrightarrow\ h = \frac{\log(2)}{\lambda}$$

となり，h の値は t に依存しないことが確かめられる．この h を $N(t)$ の **半減期** とよぶ．上の式から，

$$(4)\quad \lambda = \frac{\log(2)}{h}$$

である．

半減期

前ページの (3) 式での，$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ の形の関数の特徴の一つに，どの時刻から出発しても，ある一定の時間がたつと値が半分になる，という性質がある．今，時刻 $t+h$ での $N(t)$ の値が時刻 t での値の半分になっている，ということをあらわしている式 $N(t+h) = \frac{1}{2}N(t)$ を考える，つまり，$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$ だが，これを h について解くと，

$$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow\ e^{-\lambda h} = \frac{1}{2} \quad \text{（両辺に } \frac{1}{N_0}e^{\lambda t} \text{ をかける）}$$

$$\Leftrightarrow\ e^{\lambda h} = 2 \ \text{(両辺の逆数をとる)}$$

$$\Leftrightarrow\ \lambda h = \log(2) \ \text{(両辺の } \log \text{ をとる)}$$

$$\Leftrightarrow\ h = \frac{\log(2)}{\lambda}$$

となり，h の値は t に依存しないことが確かめられる．この h を $N(t)$ の **半減期** とよぶ．上の式から，

(4) $\lambda = \dfrac{\log(2)}{h}$

である．

半減期

前ページの (3) 式での，$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ の形の関数の特徴の一つに，どの時刻から出発しても，ある一定の時間がたつと値が半分になる，という性質がある．今，時刻 $t+h$ での $N(t)$ の値が時刻 t での値の半分になっている，ということをあらわしている式 $N(t+h) = \frac{1}{2}N(t)$ を考える，つまり，$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$ だが，これを h について解くと，

$$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda h} = \frac{1}{2} \quad \text{（両辺に } \frac{1}{N_0}e^{\lambda t} \text{ をかける）}$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda h} = 2 \text{ (両辺の逆数をとる)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda h = \log(2) \text{ (両辺の } \log \text{ をとる)}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\log(2)}{\lambda}$$

となり，h の値は t に依存しないことが確かめられる．この h を $N(t)$ の **半減期** とよぶ．上の式から，

$$(4) \quad \lambda = \frac{\log(2)}{h}$$

である．

半減期

前ページの (3) 式での，$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ の形の関数の特徴の一つに，どの時刻から出発しても，ある一定の時間がたつと値が半分になる，という性質がある．今，時刻 $t+h$ での $N(t)$ の値が時刻 t での値の半分になっている，ということをあらわしている式 $N(t+h) = \frac{1}{2}N(t)$ を考える，つまり，$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$ だが，これを h について解くと，

$$N_0 e^{-\lambda(t+h)} = \frac{1}{2}N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda h} = \frac{1}{2} \quad \text{（両辺に } \frac{1}{N_0}e^{\lambda t} \text{ をかける）}$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda h} = 2 \text{ (両辺の逆数をとる)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda h = \log(2) \text{ (両辺の log をとる)}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\log(2)}{\lambda}$$

となり，h の値は t に依存しないことが確かめられる．この h を $N(t)$ の **半減期** とよぶ．上の式から，

$$(4) \quad \lambda = \frac{\log(2)}{h}$$

である．

炭素の同位元素による年代測定

空気中には微量の炭素同位元素 C_{14} が存在する． C_{14} と炭素原子 C の空気中の比率は（ここ数万年）ほぼ一定と考えてよい．

生体内の C_{14} と C の比率は，代謝によって空気中の比率と同じに保たれるが，生体が死滅すると，その死骸では代謝が行われなくなり，外界と遮断されるので，そこでの C_{14} は自然崩壊して (1) 式に従って次第に少なくなってゆく．

C_{14} の半減期は 5730 年なので，時間 t で年を単位とすることにすれば，(4) の式から，

(5) $\lambda = 1/5730 \times \log(2)$ $(= 0.000120968094338559 4\cdots\ )$

となる．

例題． ある遺跡から出土した木炭片の C_{14}/C 比が，空気中のそれの 77% だったという． この遺跡の年代を推定せよ．

炭素の同位元素による年代測定

空気中には微量の炭素同位元素 C_{14} が存在する．C_{14} と炭素原子 C の空気中の比率は（ここ数万年）ほぼ一定と考えてよい．

生体内の C_{14} と C の比率は，代謝によって空気中の比率と同じに保たれるが，生体が死滅すると，その死骸では代謝が行われなくなり，外界と遮断されるので，そこでの C_{14} は自然崩壊して (1) 式に従って次第に少なくなってゆく．

C_{14} の半減期は 5730 年なので，時間 t で年を単位とすることにすれば，(4) の式から，

(5) $\lambda = 1/5730 \times \log(2)$ $(= 0.000120968094338559 4\cdots)$

となる．

> **例題．** ある遺跡から出土した木炭片の C_{14}/C 比が，空気中のそれの 77% だったという．この遺跡の年代を推定せよ．

炭素の同位元素による年代測定

空気中には微量の炭素同位元素 C_{14} が存在する．C_{14} と炭素原子 C の空気中の比率は（ここ数万年）ほぼ一定と考えてよい．

生体内の C_{14} と C の比率は，代謝によって空気中の比率と同じに保たれるが，生体が死滅すると，その死骸では代謝が行われなくなり，外界と遮断されるので，そこでの C_{14} は自然崩壊して (1) 式に従って次第に少なくなってゆく．

C_{14} の半減期は 5730 年なので，時間 t で年を単位とすることにすれば，(4) の式から，

(5) $\lambda = 1/5730 \times \log(2)$ $(= 0.0001209680943385594 \cdots)$

となる．

例題． ある遺跡から出土した木炭片の $\mathrm{C}_{14}/\mathrm{C}$ 比が，空気中のそれの 77% だったという．この遺跡の年代を推定せよ．

炭素の同位元素による年代測定

空気中には微量の炭素同位元素 C_{14} が存在する．C_{14} と炭素原子 C の空気中の比率は（ここ数万年）ほぼ一定と考えてよい．

生体内の C_{14} と C の比率は，代謝によって空気中の比率と同じに保たれるが，生体が死滅すると，その死骸では代謝が行われなくなり，外界と遮断されるので，そこでの C_{14} は自然崩壊して (1) 式に従って次第に少なくなってゆく．

C_{14} の半減期は 5730 年なので，時間 t で年を単位とすることにすれば，(4) の式から，

(5) $\lambda = 1/5730 \times \log(2)$ $(= 0.000120968094338 5594 \cdots)$

となる．

例題． ある遺跡から出土した木炭片の C_{14}/C 比が，空気中のそれの 77% だったという．この遺跡の年代を推定せよ．

炭素の同位元素による年代測定

空気中には微量の炭素同位元素 C_{14} が存在する．C_{14} と炭素原子 C の空気中の比率は（ここ数万年）ほぼ一定と考えてよい．

生体内の C_{14} と C の比率は，代謝によって空気中の比率と同じに保たれるが，生体が死滅すると，その死骸では代謝が行われなくなり，外界と遮断されるので，そこでの C_{14} は自然崩壊して (1) 式に従って次第に少なくなってゆく．

C_{14} の半減期は 5730 年なので，時間 t で年を単位とすることにすれば，(4) の式から，

$$(5)\quad \lambda = 1/5730 \times \log(2) \; (= 0.0001209680943385594 \cdots\ )$$

となる．

例題． ある遺跡から出土した木炭片の $\mathrm{C}_{14}/\mathrm{C}$ 比が，空気中のそれの 77% だったという．この遺跡の年代を推定せよ．

炭素の同位元素による年代測定

空気中には微量の炭素同位元素 C_{14} が存在する．C_{14} と炭素原子 C の空気中の比率は（ここ数万年）ほぼ一定と考えてよい．

生体内の C_{14} と C の比率は，代謝によって空気中の比率と同じに保たれるが，生体が死滅すると，その死骸では代謝が行われなくなり，外界と遮断されるので，そこでの C_{14} は自然崩壊して (1) 式に従って次第に少なくなってゆく．

C_{14} の半減期は 5730 年なので，時間 t で年を単位とすることにすれば，(4) の式から，

$$(5)\quad \lambda = 1/5730 \times \log(2) \ (= 0.000120968094338559 4\cdots\ )$$

となる．

例題． ある遺跡から出土した木炭片の $\mathrm{C}_{14}/\mathrm{C}$ 比が，空気中のそれの 77% だったという．この遺跡の年代を推定せよ．

炭素の同位元素による年代測定 (2)

例題. ある遺跡から出土した木炭片の $\mathrm{C}_{14}/\mathrm{C}$ 比が，空気中のそれの 77% だったという．この遺跡の年代を推定せよ．

この遺跡が使われていた時代から現在までの時間を t^* とすると，（現在の）空気中の $\mathrm{C}_{14}/\mathrm{C}$ 比を N_0 として使ってよいから，

(6) $0.77N_0 = N_0 e^{-\lambda t^*}$

とおける．両辺を N_0 で割って，両辺の log をとって t^* について解くと，

$$t^* = -\frac{1}{\lambda} log(0.77) = -\frac{5730}{\log(2)} \log(0.77) = 2160.60908\cdots$$

となり，この遺跡は 2160 年ほど前のものであることがわかる．

ただし，実際の応用では，他の情報を補足して，（たとえば，$t^* = 2160 \pm 200$ 年，というような形の）上の計算の誤差範囲の評価ができることが望ましい．

炭素の同位元素による年代測定 (2)

例題. ある遺跡から出土した木炭片の $\mathrm{C}_{14}/\mathrm{C}$ 比が，空気中のそれの 77% だったという．この遺跡の年代を推定せよ．

この遺跡が使われていた時代から現在までの時間を t^* とすると，（現在の）空気中の $\mathrm{C}_{14}/\mathrm{C}$ 比を N_0 として使ってよいから，

$$0.77 N_0 = N_0 e^{-\lambda t^*} \tag{6}$$

とおける．両辺を N_0 で割って，両辺の log をとって t^* について解くと，

$$t^* = -\frac{1}{\lambda} log(0.77) = -\frac{5730}{\log(2)} \log(0.77) = 2160.60908\cdots$$

となり，この遺跡は 2160 年ほど前のものであることがわかる．

ただし，実際の応用では，他の情報を補足して，（たとえば，$t^* = 2160 \pm 200$ 年，というような形の）上の計算の誤差範囲の評価ができることが望ましい．

炭素の同位元素による年代測定 (2)

例題． ある遺跡から出土した木炭片の $\mathrm{C}_{14}/\mathrm{C}$ 比が，空気中のそれの 77% だったという．この遺跡の年代を推定せよ．

この遺跡が使われていた時代から現在までの時間を t^* とすると，（現在の）空気中の $\mathrm{C}_{14}/\mathrm{C}$ 比を N_0 として使ってよいから，

$$(6)\quad 0.77N_0 = N_0 e^{-\lambda t^*}$$

とおける．両辺を N_0 で割って，両辺の log をとって t^* について解くと，

$$t^* = -\frac{1}{\lambda} log(0.77) = -\frac{5730}{\log(2)} \log(0.77) = 2160.60908\cdots$$

となり，この遺跡は 2160 年ほど前のものであることがわかる．

ただし，実際の応用では，他の情報を補足して，（たとえば，$t^* = 2160 \pm 200$ 年，というような形の）上の計算の誤差範囲の評価ができることが望ましい．

炭素の同位元素による年代測定 (2)

例題. ある遺跡から出土した木炭片の $\mathrm{C}_{14}/\mathrm{C}$ 比が，空気中のそれの 77% だったという．この遺跡の年代を推定せよ．

この遺跡が使われていた時代から現在までの時間を t^* とすると，（現在の）空気中の $\mathrm{C}_{14}/\mathrm{C}$ 比を N_0 として使ってよいから，

(6) $0.77N_0 = N_0 e^{-\lambda t^*}$

とおける．両辺を N_0 で割って，両辺の log をとって t^* について解くと，

$$t^* = -\frac{1}{\lambda} log(0.77) = -\frac{5730}{\log(2)} \log(0.77) = 2160.60908\cdots$$

となり，この遺跡は 2160 年ほど前のものであることがわかる．

ただし，実際の応用では，他の情報を補足して，（たとえば，$t^* = 2160 \pm 200$ 年，というような形の）上の計算の誤差範囲の評価ができることが望ましい．

炭素の同位元素による年代測定 (2)

例題. ある遺跡から出土した木炭片の $\mathrm{C}_{14}/\mathrm{C}$ 比が，空気中のそれの 77% だったという．この遺跡の年代を推定せよ．

この遺跡が使われていた時代から現在までの時間を t^* とすると，（現在の）空気中の $\mathrm{C}_{14}/\mathrm{C}$ 比を N_0 として使ってよいから，

$$(6) \quad 0.77N_0 = N_0 e^{-\lambda t^*}$$

とおける．両辺を N_0 で割って，両辺の log をとって t^* について解くと，

$$t^* = -\frac{1}{\lambda} log(0.77) = -\frac{5730}{\log(2)} \log(0.77) = 2160.60908\cdots$$

となり，この遺跡は 2160 年ほど前のものであることがわかる．

ただし，実際の応用では，他の情報を補足して,（たとえば，$t^* = 2160 \pm 200$ 年，というような形の）上の計算の誤差範囲の評価ができることが望ましい．

白鉛中の 鉛$_{226}$ による年代測定

鉛の鉱石では,

ウラン $\to$ ラジウム$_{266}$ $\to$ 鉛$_{210}$ $\to \cdots \to$ 鉛

という崩壊の体系が（ほぼ）平衡状態にある．この鉱石から白鉛（はくえん: 数千年前から使われている白色の顔料）を作るときに精製の段階で，多くの放射性物質がとりのぞかれて，鉛$_{210}$ と少量の ラジウム$_{266}$ が残った状態になる．ラジウム$_{266}$ の半減期は長いので，崩壊の速度は一定に保たれるとしてよい．したがって，キャンバスに塗られた白鉛の絵の具の中で 鉛$_{210}$ が ラジウム$_{266}$ と平衡状態になるまで，自然崩壊して減ってゆくことになる．ラジウムの崩壊の速度を r であらわすと，r はラジウムの崩壊によって供給される 鉛$_{210}$ の増加に一致する．
したがって，$N(t)$ を時刻 t での 鉛$_{210}$ の量とすると，$N(t)$ は,

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) + r, \ N(0) = N_0 \tag{7}$$

を満たす．

白鉛中の 鉛$_{226}$ による年代測定

鉛の鉱石では,

ウラン $\rightarrow$ ラジウム$_{266}$ $\rightarrow$ 鉛$_{210}$ $\rightarrow \cdots \rightarrow$ 鉛

という崩壊の体系が（ほぼ）平衡状態にある. この鉱石から白鉛（はくえん: 数千年前から使われている白色の顔料）を作るときに精製の段階で, 多くの放射性物質がとりのぞかれて, 鉛$_{210}$ と少量の ラジウム$_{266}$ が残った状態になる. ラジウム$_{266}$ の半減期は長いので, 崩壊の速度は一定に保たれるとしてよい. したがって, キャンバスに塗られた白鉛の絵の具の中で 鉛$_{210}$ が ラジウム$_{266}$ と平衡状態になるまで, 自然崩壊して減ってゆくことになる. ラジウムの崩壊の速度を r であらわすと, r はラジウムの崩壊によって供給される 鉛$_{210}$ の増加に一致する.
したがって, $N(t)$ を時刻 t での 鉛$_{210}$ の量とすると, $N(t)$ は,

$$(7)\quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) + r,\ N(0) = N_0$$

を満たす.

白鉛中の 鉛$_{226}$ による年代測定

鉛の鉱石では,

ウラン → ラジウム$_{266}$ → 鉛$_{210}$ → ⋯ → 鉛

という崩壊の体系が（ほぼ）平衡状態にある． この鉱石から白鉛（はくえん: 数千年前から使われている白色の顔料）を作るときに精製の段階で，多くの放射性物質がとりのぞかれて，鉛$_{210}$ と少量の ラジウム$_{266}$ が残った状態になる． ラジウム$_{266}$ の半減期は長いので，崩壊の速度は一定に保たれるとしてよい． したがって，キャンバスに塗られた白鉛の絵の具の中で 鉛$_{210}$ が ラジウム$_{266}$ と平衡状態になるまで，自然崩壊して減ってゆくことになる． ラジウムの崩壊の速度を r であらわすと，r はラジウムの崩壊によって供給される 鉛$_{210}$ の増加に一致する．
したがって，$N(t)$ を時刻 t での 鉛$_{210}$ の量とすると，$N(t)$ は,

$$(7)\quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) + r,\ N(0) = N_0$$

を満たす．

白鉛中の 鉛$_{226}$ による年代測定

鉛の鉱石では,

ウラン → ラジウム$_{266}$ → 鉛$_{210}$ → ⋯ → 鉛

という崩壊の体系が（ほぼ）平衡状態にある. この鉱石から白鉛（はくえん: 数千年前から使われている白色の顔料）を作るときに精製の段階で, 多くの放射性物質がとりのぞかれて, 鉛$_{210}$ と少量の ラジウム$_{266}$ が残った状態になる. ラジウム$_{266}$ の半減期は長いので, 崩壊の速度は一定に保たれるとしてよい. したがって, キャンバスに塗られた白鉛の絵の具の中で 鉛$_{210}$ が ラジウム$_{266}$ と平衡状態になるまで, 自然崩壊して減ってゆくことになる. ラジウムの崩壊の速度を r であらわすと, r はラジウムの崩壊によって供給される 鉛$_{210}$ の増加に一致する.
したがって, $N(t)$ を時刻 t での 鉛$_{210}$ の量とすると, $N(t)$ は,

$$(7)\quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) + r,\ N(0) = N_0$$

を満たす.

白鉛中の 鉛$_{226}$ による年代測定

鉛の鉱石では,

ウラン $\rightarrow$ ラジウム$_{266}$ $\rightarrow$ 鉛$_{210}$ $\rightarrow \cdots \rightarrow$ 鉛

という崩壊の体系が（ほぼ）平衡状態にある． この鉱石から白鉛（はくえん: 数千年前から使われている白色の顔料）を作るときに精製の段階で， 多くの放射性物質がとりのぞかれて， 鉛$_{210}$ と少量の ラジウム$_{266}$ が残った状態になる． ラジウム$_{266}$ の半減期は長いので， 崩壊の速度は一定に保たれるとしてよい． したがって, キャンバスに塗られた白鉛の絵の具の中で 鉛$_{210}$ が ラジウム$_{266}$ と平衡状態になるまで， 自然崩壊して減ってゆくことになる． ラジウムの崩壊の速度を r であらわすと， r はラジウムの崩壊によって供給される 鉛$_{210}$ の増加に一致する．
したがって， $N(t)$ を時刻 t での 鉛$_{210}$ の量とすると， $N(t)$ は,

$$(7) \quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) + r, \; N(0) = N_0$$

を満たす.

白鉛中の 鉛$_{226}$ による年代測定

鉛の鉱石では,

$$\text{ウラン} \to \text{ラジウム}_{266} \to \text{鉛}_{210} \to \cdots \to \text{鉛}$$

という崩壊の体系が（ほぼ）平衡状態にある．この鉱石から白鉛（はくえん: 数千年前から使われている白色の顔料）を作るときに精製の段階で，多くの放射性物質がとりのぞかれて，鉛$_{210}$ と少量の ラジウム$_{266}$ が残った状態になる．ラジウム$_{266}$ の半減期は長いので，崩壊の速度は一定に保たれるとしてよい．したがって，キャンバスに塗られた白鉛の絵の具の中で 鉛$_{210}$ が ラジウム$_{266}$ と平衡状態になるまで，自然崩壊して減ってゆくことになる．ラジウムの崩壊の速度を r であらわすと，r はラジウムの崩壊によって供給される 鉛$_{210}$ の増加に一致する．

したがって，$N(t)$ を時刻 t での 鉛$_{210}$ の量とすると，$N(t)$ は,

$$(7) \quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) + r, \; N(0) = N_0$$

を満たす．

白鉛中の 鉛$_{226}$ による年代測定

鉛の鉱石では,

ウラン $\to$ ラジウム$_{266}$ $\to$ 鉛$_{210}$ $\to \cdots \to$ 鉛

という崩壊の体系が（ほぼ）平衡状態にある．この鉱石から白鉛（はくえん: 数千年前から使われている白色の顔料）を作るときに精製の段階で，多くの放射性物質がとりのぞかれて，鉛$_{210}$ と少量の ラジウム$_{266}$ が残った状態になる．ラジウム$_{266}$ の半減期は長いので，崩壊の速度は一定に保たれるとしてよい．したがって，キャンバスに塗られた白鉛の絵の具の中で 鉛$_{210}$ が ラジウム$_{266}$ と平衡状態になるまで，自然崩壊して減ってゆくことになる．ラジウムの崩壊の速度を r であらわすと，r はラジウムの崩壊によって供給される 鉛$_{210}$ の増加に一致する．
したがって，$N(t)$ を時刻 t での 鉛$_{210}$ の量とすると，$N(t)$ は,

$$(7) \quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) + r, \; N(0) = N_0$$

を満たす．

白鉛中の 鉛$_{226}$ による絵画の年代測定 (2)

したがって， $N(t)$ を時刻 t での 鉛$_{210}$ の量とすると， $N(t)$ は,

$$(7)\quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) + r,\ N(0) = N_0$$

を満たす.
このような $N(t)$ は,

$$N(t) = \frac{r}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t} + N_0 e^{-\lambda t})$$

とあらわせる． ここで t^* を絵の具がキャンバスに塗られてから現在までの時間とすると

$$N(t^*) = \frac{r}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t^*} + N_0 e^{-\lambda t^*})$$

上で赤く表示した値は，測定可能だが， N_0 は絵の具に依存するので，決定することができない． したがって， t^* を算出できない.

白鉛中の 鉛$_{226}$ による絵画の年代測定 (2)

したがって，$N(t)$ を時刻 t での 鉛$_{210}$ の量とすると，$N(t)$ は,

$$(7)\quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) + r,\ N(0) = N_0$$

を満たす.
このような $N(t)$ は,

$$N(t) = \frac{r}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t} + N_0 e^{-\lambda t})$$

とあらわせる．ここで t^* を絵の具がキャンバスに塗られてから現在までの時間とすると

$$N(t^*) = \frac{r}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t^*} + N_0 e^{-\lambda t^*})$$

上で赤く表示した値は，測定可能だが，N_0 は絵の具に依存するので，決定することができない．したがって，t^* を算出できない．

白鉛中の 鉛$_{226}$ による絵画の年代測定 (2)

したがって，$N(t)$ を時刻 t での 鉛$_{210}$ の量とすると，$N(t)$ は,

$$(7)\quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) + r,\ N(0) = N_0$$

を満たす.
このような $N(t)$ は,

$$N(t) = \frac{r}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t} + N_0 e^{-\lambda t})$$

とあらわせる．ここで t^* を絵の具がキャンバスに塗られてから現在までの時間とすると

$$N(t^*) = \frac{r}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t^*} + N_0 e^{-\lambda t^*})$$

上で赤く表示した値は，測定可能だが，N_0 は絵の具に依存するので，決定することができない．したがって，t^* を算出できない.

白鉛中の 鉛$_{226}$ による絵画の年代測定 (3)

しかし，次のような議論が可能である:

もしこの絵がフェルメールの時代に描かれたものだったとすると，$t^* \approx 300$ となるから，これを前の式に代入すると，

$$N(300) = \frac{r}{\lambda}(1 - e^{-\lambda 300} + N_0 e^{-\lambda 300})$$

となる．この式を変形すると，

$$(8) \quad \lambda N_0 = \lambda N(300)e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1)$$

となる．この式に『エマオのキリストと使徒たち』での測定値を代入して計算すると，実際の顔料から測定できる値の範囲から大きくかけはなれた値になってしまう．このことから,『エマオのキリストと使徒たち』がフェルメールの時代に作られたものではないことが結論できる．

白鉛中の 鉛$_{226}$ による絵画の年代測定 (3)

しかし，次のような議論が可能である:

もしこの絵がフェルメールの時代に描かれたものだったとすると，$t^* \approx 300$ となるから，これを前の式に代入すると，

$$N(300) = \frac{r}{\lambda}(1 - e^{-\lambda 300} + N_0 e^{-\lambda 300})$$

となる．この式を変形すると，

$$(8) \quad \lambda N_0 = \lambda N(300) e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1)$$

となる．この式に『エマオのキリストと使徒たち』での測定値を代入して計算すると，実際の顔料から測定できる値の範囲から大きくかけはなれた値になってしまう．このことから,『エマオのキリストと使徒たち』がフェルメールの時代に作られたものではないことが結論できる．

白鉛中の 鉛$_{226}$による絵画の年代測定 (3)

しかし，次のような議論が可能である:

もしこの絵がフェルメールの時代に描かれたものだったとすると，$t^* \approx 300$ となるから，これを前の式に代入すると，

$$N(300) = \frac{r}{\lambda}(1 - e^{-\lambda 300} + N_0 e^{-\lambda 300})$$

となる．この式を変形すると，

$$(8) \quad \lambda N_0 = \lambda N(300) e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1)$$

となる．この式に『エマオのキリストと使徒たち』での測定値を代入して計算すると，実際の顔料から測定できる値の範囲から大きくかけはなれた値になってしまう．このことから,『エマオのキリストと使徒たち』がフェルメールの時代に作られたものではないことが結論できる．

白鉛中の 鉛$_{226}$による絵画の年代測定 (3)

しかし，次のような議論が可能である:

もしこの絵がフェルメールの時代に描かれたものだったとすると，$t^* \approx 300$ となるから，これを前の式に代入すると，

$$N(300) = \frac{r}{\lambda}(1 - e^{-\lambda 300} + N_0 e^{-\lambda 300})$$

となる．この式を変形すると，

(8) $\lambda N_0 = \lambda N(300)e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1)$

となる．この式に『エマオのキリストと使徒たち』での測定値を代入して計算すると，実際の顔料から測定できる値の範囲から大きくかけはなれた値になってしまう．このことから,『エマオのキリストと使徒たち』がフェルメールの時代に作られたものではないことが結論できる．

白鉛中の 鉛$_{226}$ による絵画の年代測定 (3)

しかし，次のような議論が可能である:

もしこの絵がフェルメールの時代に描かれたものだったとすると，$t^* \approx 300$ となるから，これを前の式に代入すると，

$$N(300) = \frac{r}{\lambda}(1 - e^{-\lambda 300} + N_0 e^{-\lambda 300})$$

となる．この式を変形すると，

$$(8) \quad \lambda N_0 = \lambda N(300) e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1)$$

となる．この式に『エマオのキリストと使徒たち』での測定値を代入して計算すると，実際の顔料から測定できる値の範囲から大きくかけはなれた値になってしまう．このことから,『エマオのキリストと使徒たち』がフェルメールの時代に作られたものではないことが結論できる．

注意

上の議論は，数学の証明法の一つである **背理法** と類似のアイデアである．

場合分け や **背理法** などの数学の証明法は，数理科学での定性的な議論でも有効なことが多い．

背理法の証明の例として，『$\sqrt{2}$ が（整数を分子分母に持つ）分数としてあらわせないこと』の証明を見てみる．この証明はピタゴラスの弟子のヒッパソスによって紀元前 5 世紀ごろに得られたものと言われている．

注意

上の議論は，数学の証明法の一つである **背理法** と類似のアイデアである．

場合分け や **背理法** などの数学の証明法は，数理科学での定性的な議論でも有効なことが多い．

背理法の証明の例として，『$\sqrt{2}$ が（整数を分子分母に持つ）分数としてあらわせないこと』の証明を見てみる．この証明はピタゴラスの弟子のヒッパソスによって紀元前 5 世紀ごろに得られたものと言われている．

注意

上の議論は，数学の証明法の一つである 背理法 と類似のアイデアである．

場合分け や 背理法 などの数学の証明法は，数理科学での定性的な議論でも有効なことが多い．

背理法の証明の例として，『$\sqrt{2}$ が（整数を分子分母に持つ）分数としてあらわせないこと』の証明を見てみる．この証明はピタゴラスの弟子のヒッパソスによって紀元前 5 世紀ごろに得られたものと言われている．

注意

上の議論は，数学の証明法の一つである **背理法** と類似のアイデアである．

場合分け や **背理法** などの数学の証明法は，数理科学での定性的な議論でも有効なことが多い．

背理法の証明の例として，『$\sqrt{2}$ が（整数を分子分母に持つ）分数としてあらわせないこと』の証明を見てみる．この証明はピタゴラスの弟子のヒッパソスによって紀元前 5 世紀ごろに得られたものと言われている．

終