数 学 の 考 え 方

2009 年春学期@中部大学

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp
http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

第 10 回目の講義 (July 7, 2009 (23:46) 版)

7 月 1 日（水曜日）5-6 時限目（13:35〜15:05）934 教室
7 月 7 日（火曜日）9-10 時限目（17:05〜18:35）946 教室

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

補講について

7 月 18 日（土） に補講を行います.

水曜 5 - 6 時限のクラス ⇒ 5 - 6 時限 (13:35〜15:05) 946 教室

火曜 9 - 10 時限のクラス ⇒ 7 - 8 時限 (15:20〜16:50) 946 教室

この 2 つの補講は，2 つともほぼ同じ内容の講義になる予定なので，時間の都合の悪い人は，他のクラスの補講に出席してもいいです．この場合には，当日用意する，補足の出席簿に名前 etc. を記入してもらうことにします.

補講について

7 月 18 日（土） に補講を行います.

水曜 5 - 6 時限のクラス ⇒ 5 - 6 時限 (13:35〜15:05) 946 教室
火曜 9 - 10 時限のクラス ⇒ 7 - 8 時限 (15:20〜16:50) 946 教室

この 2 つの補講は，2 つともほぼ同じ内容の講義になる予定なので，時間の都合の悪い人は，他のクラスの補講に出席してもいいです．この場合には，当日用意する，補足の出席簿に名前 etc. を記入してもらうことにします.

補講について

7 月 18 日（土） に補講を行います.

水曜 5 - 6 時限のクラス $\Rightarrow$	5 - 6 時限 (13:35〜15:05) 946 教室
火曜 9 - 10 時限のクラス $\Rightarrow$	7 - 8 時限 (15:20〜16:50) 946 教室

この 2 つの補講は, 2 つともほぼ同じ内容の講義になる予定なので, 時間の都合の悪い人は, 他のクラスの補講に出席してもいいです. この場合には, 当日用意する, 補足の出席簿に名前 etc. を記入してもらうことにします.

公理的方法

- 前回までの数回で，数学における,「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」という姿勢について，冪（べき）演算の扱いを例にとって論じた．
- しかし「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ことの究極の形は，数学全体で前提として仮定することを明確にして，それから出発して，すべての数学理論をその上に構築することだろう．
- 数学全体で，すべての議論の前提として仮定するような命題のことを 公理 (axiom) という．また，いくつかの公理を集めて作られる体系のことを，公理系 (axiom system) という

公理的方法

- 前回までの数回で，数学における,「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」という姿勢について，冪（べき）演算の扱いを例にとって論じた．
- しかし「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ことの究極の形は，数学全体で前提として仮定することを明確にして，それから出発して，すべての数学理論をその上に構築することだろう．
- 数学全体で，すべての議論の前提として仮定するような命題のことを **公理** (axiom) という．また，いくつかの公理を集めて作られる体系のことを，**公理系** (axiom system) という

公理的方法

- 前回までの数回で，数学における,「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」という姿勢について，冪（べき）演算の扱いを例にとって論じた.
- しかし「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ことの究極の形は，数学全体で前提として仮定することを明確にして，それから出発して，すべての数学理論をその上に構築することだろう.
- 数学全体で，すべての議論の前提として仮定するような命題のことを **公理** (axiom) という．また，いくつかの公理を集めて作られる体系のことを，**公理系** (axiom system) という

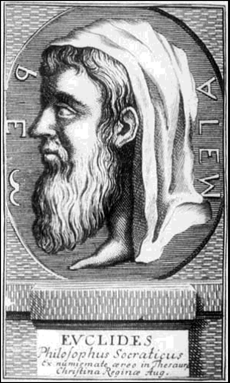
公理的方法

- 前回までの数回で，数学における,「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」という姿勢について，冪（べき）演算の扱いを例にとって論じた.
- しかし「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ことの究極の形は，数学全体で前提として仮定することを明確にして，それから出発して，すべての数学理論をその上に構築することだろう.
- 数学全体で，すべての議論の前提として仮定するような命題のことを **公理** (axiom) という．また，いくつかの公理を集めて作られる体系のことを，**公理系** (axiom system) という

公理的方法

- 前回までの数回で，数学における,「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」という姿勢について，冪（べき）演算の扱いを例にとって論じた．
- しかし「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ことの究極の形は，数学全体で前提として仮定することを明確にして，それから出発して，すべての数学理論をその上に構築することだろう．
- 数学全体で，すべての議論の前提として仮定するような命題のことを **公理** (axiom) という．また，いくつかの公理を集めて作られる体系のことを，**公理系** (axiom system) という

公理的方法の歴史

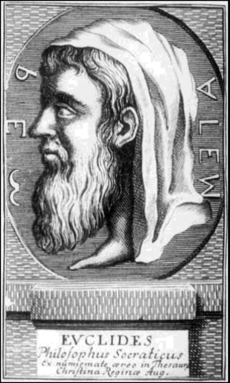


ユークリッド

（紀元前 325 年ごろ 〜 紀元前 265 年ごろ（アレクサンドリア））

- 古代ギリシャの数学者ユークリッドの著した『原論』（英語では Elements ギリシャ語の原語では “ストイケイア”）は，当時の数学の集大成である．『原論』は公理（原論では「公理」「公準」という 2 つのカテゴリーに分けられている）から出発して，全理論を厳密な証明を積上げて構築する，というスタイルが（おそらく歴史上初めて）用いられている．

公理的方法の歴史

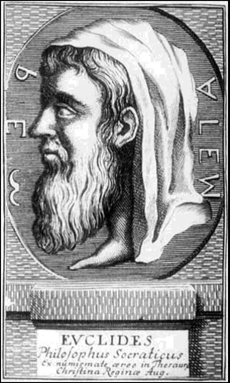


ユークリッド

（紀元前 325 年ごろ ～ 紀元前 265 年ごろ（アレクサンドリア））

- 古代ギリシャの数学者ユークリッドの著した『原論』（英語では Elements ギリシャ語の原語では "ストイケイア"）は，当時の数学の集大成である． 『原論』は公理（原論では「公理」「公準」という 2 つのカテゴリーに分けられている）から出発して，全理論を厳密な証明を積上げて構築する，というスタイルが（おそらく歴史上初めて）用いられている．

公理的方法の歴史



ユークリッド

（紀元前 325 年ごろ ～ 紀元前 265 年ごろ（アレクサンドリア））

▶ 古代ギリシャの数学者ユークリッドの著した『原論』（英語では Elements ギリシャ語の原語では “ストイケイア”）は，当時の数学の集大成である．『原論』は公理（原論では「公理」「公準」という 2 つのカテゴリーに分けられている）から出発して，全理論を厳密な証明を積上げて構築する，というスタイルが（おそらく歴史上初めて）用いられている．

公理的方法の歴史

ユークリッドの『原論』の第 1 巻は次のような公理（と公準）を出発点に置いている:

- 同じものと等しいものは互いに等しい
- 同じものに同じものを加えた場合、その合計は等しい
- 同じものから同じものを引いた場合、残りは等しい
- 互いに一致するものは、互いに等しい
- 全体は、部分より大きい

- 任意の一点から他の一点に対して直線を引くことができる
- 有限の直線を連続的にまっすぐ延長することができる
- 任意の中心と半径で円を描くことができる
- すべての直角は互いに等しい
- 直線が 2 直線と交わるとき、同じ側の内角の和が二直角未満である場合、その 2 直線が限りなく延長されたとき、内角の和が二直角未満の側で交わる

公理的方法の歴史

ユークリッドの『原論』の第１巻は次のような公理（と公準）を出発点に置いている:

- 同じものと等しいものは互いに等しい
- 同じものに同じものを加えた場合、その合計は等しい
- 同じものから同じものを引いた場合、残りは等しい
- 互いに一致するものは、互いに等しい
- 全体は、部分より大きい

- 任意の一点から他の一点に対して直線を引くことができる
- 有限の直線を連続的にまっすぐ延長することができる
- 任意の中心と半径で円を描くことができる
- すべての直角は互いに等しい
- 直線が２直線と交わるとき、同じ側の内角の和が二直角未満である場合、その２直線が限りなく延長されたとき、内角の和が二直角未満の側で交わる

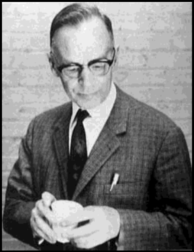
公理的方法の歴史

ユークリッドの『原論』の第１巻は次のような公理（と公準）を出発点に置いている:

- 同じものと等しいものは互いに等しい
- 同じものに同じものを加えた場合、その合計は等しい
- 同じものから同じものを引いた場合、残りは等しい
- 互いに一致するものは、互いに等しい
- 全体は、部分より大きい

- 任意の一点から他の一点に対して直線を引くことができる
- 有限の直線を連続的にまっすぐ延長することができる
- 任意の中心と半径で円を描くことができる
- すべての直角は互いに等しい
- 直線が２直線と交わるとき、同じ側の内角の和が二直角未満である場合、その２直線が限りなく延長されたとき、内角の和が二直角未満の側で交わる

公理的方法の歴史



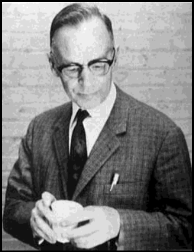
B.L. van der Waerden

(1903(明治 36 年) アムステルダム ~ 1996(平成 8 年) チューリッヒ)

Van der Waerden （ファン=デル=ヴェルデン）は，Encyclopaedia Britannica のユークリッドの項目で次のように書いている:

Almost from the time of its writing and lasting almost to the present, the Elements has exerted a continuous and major influence on human affairs. It was the primary source of geometric reasoning, theorems, and methods at least until the advent of non-Euclidean geometry in the 19th century. It is sometimes said that, next to the Bible, the "Elements" may be the most translated, published, and studied of all the books produced in the Western world.

公理的方法の歴史



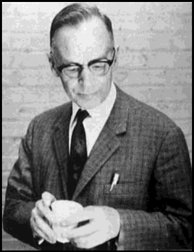
B.L. van der Waerden

(1903(明治 36 年) アムステルダム ～ 1996(平成 8 年) チューリッヒ)

Van der Waerden （ファン=デル=ヴェルデン）は，Encyclopaedia Britannica のユークリッドの項目で次のように書いている:

Almost from the time of its writing and lasting almost to the present, the Elements has exerted a continuous and major influence on human affairs. It was the primary source of geometric reasoning, theorems, and methods at least until the advent of non-Euclidean geometry in the 19th century. It is sometimes said that, next to the Bible, the "Elements" may be the most translated, published, and studied of all the books produced in the Western world.

公理的方法の歴史



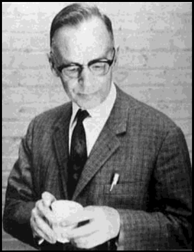
B.L. van der Waerden

(1903(明治 36 年) アムステルダム ～ 1996(平成 8 年) チューリッヒ)

Van der Waerden （ファン=デル=ヴェルデン）は，Encyclopaedia Britannica のユークリッドの項目で次のように書いている:

Almost from the time of its writing and lasting almost to the present, the Elements has exerted a continuous and major influence on human affairs. It was the primary source of geometric reasoning, theorems, and methods at least until the advent of non-Euclidean geometry in the 19th century. It is sometimes said that, next to the Bible, the "Elements" may be the most translated, published, and studied of all the books produced in the Western world.

公理的方法の歴史



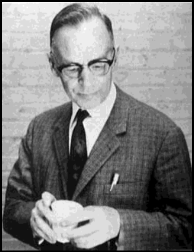
B.L. van der Waerden

(1903(明治 36 年) アムステルダム ～ 1996(平成 8 年) チューリッヒ)

Van der Waerden （ファン=デル=ヴェルデン）は，Encyclopaedia Britannica のユークリッドの項目で次のように書いている:

Almost from the time of its writing and lasting almost to the present, the Elements has exerted a continuous and major influence on human affairs. It was the primary source of geometric reasoning, theorems, and methods at least until the advent of non-Euclidean geometry in the 19th century. It is sometimes said that, next to the Bible, the "Elements" may be the most translated, published, and studied of all the books produced in the Western world.

公理的方法の歴史



B.L. van der Waerden

(1903(明治 36 年) アムステルダム ∼ 1996(平成 8 年) チューリッヒ)

Van der Waerden （ファン=デル=ヴェルデン）は，Encyclopaedia Britannica のユークリッドの項目で次のように書いている:

『原論』は，それが書かれた時から，ほとんど現代にいたるまで，人類に非常に大きな影響を与え続けてきた．少なくとも非ユークリッド幾何学が 19 世紀に現われるまでは,『原論』は，幾何学の推論，定理，手法に関する唯一主要な文献であった.『原論』は，西洋で，聖書についで最も多く翻訳され，出版され，研究された書物であるとも言われる.

公理的方法の歴史

D. Hilbert

(1862(文久 2 年) ケーニヒスベルク（現カリングラード)

〜 1943(昭和 18 年) ゲッティンゲン)

- 現代的な視点から見ると，ユークリッドの『原論』の記述法や公理や定義のとらえ方には，厳密性に欠けるところがある．
- 20 世紀前半の最大の数学者（の一人）であったヒルベルトは，彼の『幾何学の基礎』(“Grundlagen der Geometrie” (1899/1930)) で，初等的幾何学の，現代的な意味での厳密な公理的展開を行なった．

公理的方法の歴史

D. Hilbert

(1862(文久 2 年) ケーニヒスベルク（現カリングラード）
〜 1943(昭和 18 年) ゲッティンゲン)

▶ 現代的な視点から見ると，ユークリッドの『原論』の記述法や公理や定義のとらえ方には，厳密性に欠けるところがある.

▶ 20 世紀前半の最大の数学者（の一人）であったヒルベルトは，彼の『幾何学の基礎』(“Grundlagen der Geometrie” (1899/1930)) で，初等的幾何学の，現代的な意味での厳密な公理的展開を行なった.

公理的方法の歴史

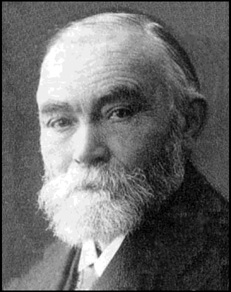
D. Hilbert

(1862(文久 2 年) ケーニヒスベルク（現カリングラード）

～ 1943(昭和 18 年) ゲッティンゲン)

- 現代的な視点から見ると，ユークリッドの『原論』の記述法や公理や定義のとらえ方には，厳密性に欠けるところがある．
- 20 世紀前半の最大の数学者（の一人）であったヒルベルトは，彼の『幾何学の基礎』(“Grundlagen der Geometrie” (1899/1930)) で，初等的幾何学の，現代的な意味での厳密な公理的展開を行なった．

公理的方法の歴史

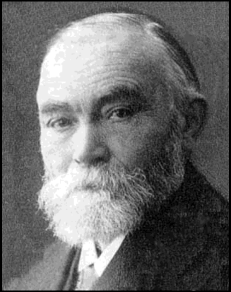


Gottfried Frege

Richard Dedekind

- 19 世紀の中頃に，数学の基礎の厳密化が試みられはじめた．
- そのような文脈で先駆的な仕事を行なった人に，ドイツの哲学者 G. Frege（フレーゲ 1848(嘉永 1 年)〜1925(大正 14 年)）や，ドイツの数学者 R. Dedekind（デデキント 1831(天保 2 年)〜1916(大正 5 年)）などがいる．

公理的方法の歴史

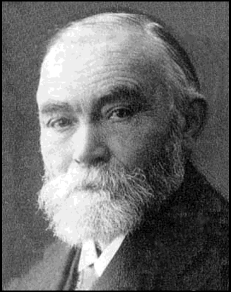


Gottfried Frege

Richard Dedekind

- 19 世紀の中頃に，数学の基礎の厳密化が試みられはじめた．
- そのような文脈で先駆的な仕事を行なった人に，ドイツの哲学者 G. Frege （フレーゲ 1848(嘉永 1 年)〜1925(大正 14 年)）や，ドイツの数学者 R. Dedekind （デデキント 1831(天保 2 年)〜1916(大正 5 年)）などがいる．

公理的方法の歴史

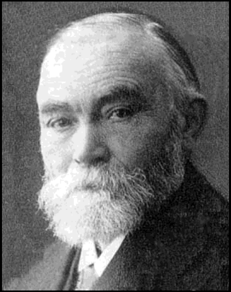


Gottfried Frege

Richard Dedekind

- 19 世紀の中頃に，数学の基礎の厳密化が試みられはじめた．
- そのような文脈で先駆的な仕事を行なった人に，ドイツの哲学者 G. Frege（フレーゲ 1848(嘉永 1 年)〜1925(大正 14 年)）や，ドイツの数学者 R. Dedekind（デデキント 1831(天保 2 年)〜1916(大正 5 年)）などがいる．

公理的方法の歴史



Gottfried Frege

Richard Dedekind

- 19 世紀の中頃に，数学の基礎の厳密化が試みられはじめた．
- そのような文脈で先駆的な仕事を行なった人に，ドイツの哲学者 G. Frege（フレーゲ 1848(嘉永 1 年)〜1925(大正 14 年)）や，ドイツの数学者 R. Dedekind（デデキント 1831(天保 2 年)〜1916(大正 5 年)）などがいる．

公理的方法の歴史

Giuseppe Peano

(1858(安政 5 年) ピエモンテ 〜 1932(昭和 7 年) トリノ)

- イタリアの数学者 Peano （ペアノ）はデデキントの仕事を敷衍して，初等的数論を公理化した．ペアノの導入した 公理系 （複数の公理からなる体系）は，今日，ペアノの公理（系） あるいは デデキント=ペアノの公理（系） と呼ばれている．

公理的方法の歴史

Giuseppe Peano

(1858(安政 5 年) ピエモンテ 〜 1932(昭和 7 年) トリノ)

▶ イタリアの数学者 Peano （ペアノ）はデデキントの仕事を敷衍して，初等的数論を公理化した．ペアノの導入した 公理系（複数の公理からなる体系）は，今日，ペアノの公理（系） あるいは デデキント=ペアノの公理（系） と呼ばれている．

デデキント＝ペアノの公理系

ペアノの公理系は，次のようなものである．

- ここで用いられる基本記号は，0, S (ただし，$S(x)$ で “$x+1$” をあらわす— x の「次の」数 (successor))，$+$, $\cdot$ である．
- 以下「すべての x に対して …」,「ある x が存在して …」など と言ったときには，それぞれ「すべての自然数 x に対して …」,「ある自然数 x が存在して …」の意味である．
- **ペアノの公理系**

> - すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
> - すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
> - すべての x に対し，$x + 0 = x$
> - すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
> - すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
> - すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
> - すべての，0, S, $+$, $\cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）

デデキント＝ペアノの公理系

ペアノの公理系は，次のようなものである．

- ここで用いられる基本記号は，0, S (ただし，$S(x)$ で “$x+1$” をあらわす— x の「次の」数 (successor))，$+$, $\cdot$ である．
- 以下「すべての x に対して …」,「ある x が存在して …」など と言ったときには，それぞれ「すべての自然数 x に対して …」，「ある自然数 x が存在して …」の意味である．
- ペアノの公理系

> - すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
> - すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
> - すべての x に対し，$x + 0 = x$
> - すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
> - すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
> - すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
> - すべての，0, S, $+$, $\cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）

デデキント＝ペアノの公理系

ペアノの公理系は，次のようなものである．

- ここで用いられる基本記号は，0, S (ただし，$S(x)$ で “$x+1$” をあらわす— x の「次の」数 (successor))，$+$, $\cdot$ である．
- 以下「すべての x に対して …」,「ある x が存在して …」など と言ったときには，それぞれ「すべての自然数 x に対して …」,「ある自然数 x が存在して …」の意味である．
- ペアノの公理系

  - すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
  - すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
  - すべての x に対し，$x + 0 = x$
  - すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
  - すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
  - すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
  - すべての，0, S, $+$, $\cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）

デデキント＝ペアノの公理系

ペアノの公理系は，次のようなものである．

- ここで用いられる基本記号は，0, S (ただし，$S(x)$ で “$x+1$” をあらわす— x の「次の」数 (successor))，$+$, $\cdot$ である．
- 以下「すべての x に対して …」,「ある x が存在して …」など と言ったときには，それぞれ 「すべての自然数 x に対して …」,「ある自然数 x が存在して …」の意味である．
- ペアノの公理系

> - すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
> - すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
> - すべての x に対し，$x + 0 = x$
> - すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
> - すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
> - すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
> - すべての，0, S, $+$, $\cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）

デデキント＝ペアノの公理系

ペアノの公理系は，次のようなものである．

- ここで用いられる基本記号は，0, S (ただし，$S(x)$ で "$x+1$" をあらわす— x の「次の」数 (successor))，$+$, $\cdot$ である．
- 以下「すべての x に対して …」,「ある x が存在して …」など と言ったときには，それぞれ「すべての自然数 x に対して …」，「ある自然数 x が存在して …」の意味である．
- **ペアノの公理系**

> - すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
> - すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
> - すべての x に対し，$x + 0 = x$
> - すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
> - すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
> - すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
> - すべての，0, S, $+$, $\cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）