数学の考え方

2009 年春学期@中部大学

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp
http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

第 11 回目の講義 (July 15, 2009 (00:44) 版)

7 月 8 日（水曜日）5-6 時限目（13:35～15:05）934 教室
7 月 14 日（火曜日）9-10 時限目（17:05～18:35）946 教室

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

補講について

7 月 18 日（土） に補講を行います.

水曜 5 - 6 時限のクラス ⇒ 5 - 6 時限 (13:35〜15:05) 946 教室

火曜 9 - 10 時限のクラス ⇒ 7 - 8 時限 (15:20〜16:50) 946 教室

- この 2 つの補講は, 2 つともほぼ同じ内容の講義になる予定なので, 時間の都合の悪い人は, 他のクラスの補講に出席してもいいです. この場合には, 当日用意する, 補足の出席簿に名前 etc. を記入してもらうことにします.

- 補講では, 私の研究している数学の分野の紹介, 現代では数学研究がどのようにやられているか, などについて, 講義での話の流れとは少し違う角度からの話をしようと思っています.

補講について

7 月 18 日（土） に補講を行います.

水曜 5 - 6 時限のクラス ⇒ 5 - 6 時限 (13:35〜15:05) 946 教室
火曜 9 - 10 時限のクラス ⇒ 7 - 8 時限 (15:20〜16:50) 946 教室

▶ この 2 つの補講は, 2 つともほぼ同じ内容の講義になる予定なので, 時間の都合の悪い人は, 他のクラスの補講に出席してもいいです. この場合には, 当日用意する, 補足の出席簿に名前 etc. を記入してもらうことにします.

▶ 補講では, 私の研究している数学の分野の紹介, 現代では数学研究がどのようにやられているか, などについて, 講義での話の流れとは少し違う角度からの話をしようと思っています.

補講について

7 月 18 日（土） に補講を行います.

水曜 5 - 6 時限のクラス $\Rightarrow$ 5 - 6 時限 (13:35〜15:05) 946 教室	
火曜 9 - 10 時限のクラス $\Rightarrow$ 7 - 8 時限 (15:20〜16:50) 946 教室	

▶ この 2 つの補講は，2 つともほぼ同じ内容の講義になる予定なので，時間の都合の悪い人は，他のクラスの補講に出席してもいいです．この場合には，当日用意する，補足の出席簿に名前 etc. を記入してもらうことにします.

▶ 補講では，私の研究している数学の分野の紹介，現代では数学研究がどのようにやられているか，などについて，講義での話の流れとは少し違う角度からの話をしようと思っています.

公理的方法の歴史（前回の復習）

Giuseppe Peano
(1858(安政 5 年) ピエモンテ 〜 1932(昭和 7 年) トリノ)

- イタリアの数学者 Peano （ペアノ）はデデキントの仕事を敷衍して，初等的数論を公理化した．ペアノの導入した 公理系（複数の公理からなる体系）は，今日，ペアノの公理（系） あるいは デデキント=ペアノの公理（系） と呼ばれている．

公理的方法の歴史（前回の復習）

Giuseppe Peano

(1858(安政 5 年) ピエモンテ ～ 1932(昭和 7 年) トリノ)

▶ イタリアの数学者 Peano （ペアノ）はデデキントの仕事を敷衍して，初等的数論を公理化した．ペアノの導入した 公理系 （複数の公理からなる体系）は，今日，ペアノの公理（系） あるいは デデキント=ペアノの公理（系） と呼ばれている．

デデキント＝ペアノの公理系

- ここで用いられる基本記号は，0, S, $+$, $\cdot$ である．
 [ただし，$S(x)$ で “$x+1$” をあらわす（ことを想定している）— x の「次の」数 (successor)]
- 以下「すべての x に対して …」,「ある x が存在して …」などと言ったときには，それぞれ「すべての自然数 x に対して …」,「ある自然数 x が存在して …」の意味とする．
- **ペアノの公理系**

(P1) すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
(P2) すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
(P3) すべての x に対し，$x + 0 = x$
(P4) すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
(P5) すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
(P6) すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
(P7) すべての，0, S, $+$, $\cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）

デデキント=ペアノの公理系

- ここで用いられる基本記号は，0, S, $+$, $\cdot$ である．
  [ただし，$S(x)$ で “$x+1$” をあらわす（ことを想定している）— x の「次の」数 (successor)]
- 以下「すべての x に対して …」,「ある x が存在して …」などと言ったときには，それぞれ「すべての自然数 x に対して …」,「ある自然数 x が存在して …」の意味とする．
- ペアノの公理系

(P1) すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
(P2) すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
(P3) すべての x に対し，$x + 0 = x$
(P4) すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
(P5) すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
(P6) すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
(P7) すべての，0, S, $+$, $\cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）

デデキント＝ペアノの公理系

- ここで用いられる基本記号は，0, S, $+$, $\cdot$ である．
  [ただし，$S(x)$ で “$x+1$” をあらわす（ことを想定している）
  — x の「次の」数 (successor)]
- 以下「すべての x に対して …」,「ある x が存在して …」などと言ったときには，それぞれ「すべての自然数 x に対して …」,「ある自然数 x が存在して …」の意味とする．
- ペアノの公理系

(P1) すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
(P2) すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
(P3) すべての x に対し，$x + 0 = x$
(P4) すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
(P5) すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
(P6) すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
(P7) すべての，0, S, $+$, $\cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）

デデキント=ペアノの公理系

- ここで用いられる基本記号は，0, S, $+$, $\cdot$ である．
  [ただし，$S(x)$ で “$x+1$” をあらわす（ことを想定している）— x の「次の」数 (successor)]
- 以下「すべての x に対して …」,「ある x が存在して …」などと言ったときには，それぞれ「すべての自然数 x に対して …」,「ある自然数 x が存在して …」の意味とする．
- ペアノの公理系

(P1) すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
(P2) すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
(P3) すべての x に対し，$x + 0 = x$
(P4) すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
(P5) すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
(P6) すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
(P7) すべての，0, S, $+$, $\cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）

デデキント＝ペアノの公理系

- ここで用いられる基本記号は，0, S, $+$, $\cdot$ である．
  ［ただし，$S(x)$ で "$x+1$" をあらわす（ことを想定している）— x の「次の」数 (successor)］
- 以下「すべての x に対して …」,「ある x が存在して …」などと言ったときには，それぞれ「すべての自然数 x に対して …」,「ある自然数 x が存在して …」の意味とする．
- **ペアノの公理系**

(P1) すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
(P2) すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
(P3) すべての x に対し，$x + 0 = x$
(P4) すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
(P5) すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
(P6) すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
(P7) すべての，0, S, $+$, $\cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）

デデキント＝ペアノの公理系

(P1) すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
(P2) すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
(P3) すべての x に対し，$x + 0 = x$
(P4) すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
(P5) すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
(P6) すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
(P7) すべての，0, S, $+$, $\cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）

Lemma 1

すべての数 a に対し，$a + 1 = S(a)$ である（ただし，ここでは，1 は $S(0)$ の省略形として用いられている）．

証明. $a + 1 = a + S(0) = S(a + 0) = S(a)$.

$$\uparrow \text{(P4)} \qquad \uparrow \text{(P3)}$$

q.e.d.

以下，$S(a)$ と $a + 1$ という表現は，ことわりなく同じものと考えることにする．

デデキント＝ペアノの公理系

(P1) すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
(P2) すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
(P3) すべての x に対し，$x + 0 = x$
(P4) すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
(P5) すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
(P6) すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
(P7) すべての，$0, S, +, \cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）

Lemma 1

すべての数 a に対し，$a + 1 = S(a)$ である（ただし，ここでは，1 は $S(0)$ の省略形として用いられている）．

証明． $a + 1 = a + S(0) = S(a + 0) = S(a)$.

$$\uparrow \text{(P4)} \qquad \uparrow \text{(P3)}$$

q.e.d.

以下，$S(a)$ と $a + 1$ という表現は，ことわりなく同じものと考えることにする．

デデキント＝ペアノの公理系

(P1) すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
(P2) すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
(P3) すべての x に対し，$x + 0 = x$
(P4) すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
(P5) すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
(P6) すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
(P7) すべての，0, S, $+$, $\cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）

Lemma 1

すべての数 a に対し，$a + 1 = S(a)$ である（ただし，ここでは，1 は $S(0)$ の省略形として用いられている）．

証明. $a + 1 = a + S(0) = S(a + 0) = S(a)$.

$$\uparrow \text{(P4)} \qquad \uparrow \text{(P3)}$$

q.e.d.

以下，$S(a)$ と $a+1$ という表現は，ことわりなく同じものと考えることにする．

デデキント=ペアノの公理系

(P1) すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
(P2) すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
(P3) すべての x に対し，$x + 0 = x$
(P4) すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
(P5) すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
(P6) すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
(P7) すべての，$0, S, +, \cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）

Lemma 1

すべての数 a に対し，$a + 1 = S(a)$ である（ただし，ここでは，1 は $S(0)$ の省略形として用いられている）．

証明． $a + 1 = a + S(0) = S(a + 0) = S(a)$.

$$\uparrow \text{(P4)} \qquad \uparrow \text{(P3)}$$

q.e.d.

以下，$S(a)$ と $a + 1$ という表現は，ことわりなく同じものと考えることにする．

デデキント=ペアノの公理系

(P1) すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
(P2) すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
(P3) すべての x に対し，$x + 0 = x$
(P4) すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
(P5) すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
(P6) すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
(P7) すべての，$0, S, +, \cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）

Lemma 1

すべての数 a に対し，$a + 1 = S(a)$ である（ただし，ここでは，1 は $S(0)$ の省略形として用いられている）．

証明. $a + 1 = a + S(0) = S(a + 0) = S(a)$.

$$\uparrow \text{(P4)} \qquad \uparrow \text{(P3)}$$

q.e.d.

以下，$S(a)$ と $a + 1$ という表現は，ことわりなく同じものと考えることにする．

デデキント＝ペアノの公理系

(P1) すべての x に対し，$S(x) \neq 0$ である．
(P2) すべての x, y に対し $x \neq y$ なら，$S(x) \neq S(y)$ である．
(P3) すべての x に対し，$x + 0 = x$
(P4) すべての x, y に対し，$x + S(y) = S(x + y)$
(P5) すべての x に対し，$x \cdot 0 = 0$
(P6) すべての x, y に対し $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
(P7) すべての，0, S, $+$, $\cdot$ を含む x に関する主張 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(0)$ が成立ち,「すべての x に対し，$\varphi(x)$ なら $\varphi(S(x))$」が成り立つなら,「すべての x に対し $\varphi(x)$」が成り立つ（数学的帰納法）

Lemma 1

すべての数 a に対し，$a + 1 = S(a)$ である（ただし，ここでは，1 は $S(0)$ の省略形として用いられている）．

証明. $a + 1 = a + S(0) = S(a + 0) = S(a)$.

$$a + 1 = a + S(0) \underset{\uparrow\ (P4)}{=} S(a + 0) \underset{\uparrow\ (P3)}{=} S(a)$$

q.e.d.

以下，$S(a)$ と $a + 1$ という表現は，ことわりなく同じものと考えることにする．

デデキント＝ペアノの公理系

定理 2 ((P1) の逆)

すべての 0 と異なる数 a に対し，$a = b + 1$ となる数 b が存在する．

証明． (*)『$a = 0$ であるか，または $a = b + 1$ となる数 b が存在する』という主張がすべての数 a に対し成り立つことを帰納法で示す．

(帰納法の初め) $a = 0$ なら，(*) は明らかに成り立つ．
(帰納法のステップ) a に対して (*) が成り立ったと仮定して，$S(a)$ に対しても (*) 成り立つことを示す．ところが，$a + 1$ は $b = a$ として，$b + 1$ の形をしているから，(*) の結論は自明に成り立ってしまう．

(P7) により，以上から，(*) がすべての数 a に対し成り立つことが示せたが，明らかに，このことは定理の主張の別表現になっている．

q.e.d.

同様に，以下のような定理もペアノの公理系から証明できる:

デデキント＝ペアノの公理系

定理 2 ((P1) の逆)

すべての 0 と異なる数 a に対し，$a = b + 1$ となる数 b が存在する．

証明． (*)『$a = 0$ であるか，または $a = b + 1$ となる数 b が存在する』という主張がすべての数 a に対し成り立つことを帰納法で示す．

(帰納法の初め) $a = 0$ なら，(*) は明らかに成り立つ．
(帰納法のステップ) a に対して (*) が成り立ったと仮定して，$S(a)$ に対しても (*) 成り立つことを示す．ところが，$a + 1$ は $b = a$ として，$b + 1$ の形をしているから，(*) の結論は自明に成り立ってしまう．

(P7) により，以上から，(*) がすべての数 a に対し成り立つことが示せたが，明らかに，このことは定理の主張の別表現になっている．

q.e.d.

同様に，以下のような定理もペアノの公理系から証明できる:

デデキント＝ペアノの公理系

定理 2 ((P1) の逆)

すべての 0 と異なる数 a に対し，$a = b + 1$ となる数 b が存在する．

証明． (*)『$a = 0$ であるか，または $a = b + 1$ となる数 b が存在する』という主張がすべての数 a に対し成り立つことを帰納法で示す．

(帰納法の初め) $a = 0$ なら，(*) は明らかに成り立つ．
(帰納法のステップ) a に対して (*) が成り立ったと仮定して，$S(a)$ に対しても (*) 成り立つことを示す．ところが，$a + 1$ は $b = a$ として，$b + 1$ の形をしているから，(*) の結論は自明に成り立ってしまう．

(P7) により，以上から，(*) がすべての数 a に対し成り立つことが示せたが，明らかに，このことは定理の主張の別表現になっている．

q.e.d.

同様に，以下のような定理もペアノの公理系から証明できる:

デデキント＝ペアノの公理系

定理 2 ((P1) の逆)

すべての 0 と異なる数 a に対し，$a = b + 1$ となる数 b が存在する．

証明． (*)『$a = 0$ であるか，または $a = b + 1$ となる数 b が存在する』 という主張がすべての数 a に対し成り立つことを帰納法で示す．

(帰納法の初め) $a = 0$ なら，(*) は明らかに成り立つ．
(帰納法のステップ) a に対して (*) が成り立ったと仮定して，$S(a)$ に対しても (*) 成り立つことを示す．ところが，$a + 1$ は $b = a$ として，$b + 1$ の形をしているから，(*) の結論は自明に成り立ってしまう．

(P7) により，以上から，(*) がすべての数 a に対し成り立つことが示せたが，明らかに，このことは定理の主張の別表現になっている．
q.e.d.

同様に，以下のような定理もペアノの公理系から証明できる:

デデキント=ペアノの公理系

定理 2 ((P1) の逆)

すべての 0 と異なる数 a に対し，$a = b + 1$ となる数 b が存在する．

証明． (*)『$a = 0$ であるか，または $a = b + 1$ となる数 b が存在する』という主張がすべての数 a に対し成り立つことを帰納法で示す．

(帰納法の初め) $a = 0$ なら，(*) は明らかに成り立つ．

(帰納法のステップ) a に対して (*) が成り立ったと仮定して，$S(a)$ に対しても (*) 成り立つことを示す．ところが，$a + 1$ は $b = a$ として，$b + 1$ の形をしているから，(*) の結論は自明に成り立ってしまう．

(P7) により，以上から，(*) がすべての数 a に対し成り立つことが示せたが，明らかに，このことは定理の主張の別表現になっている． **q.e.d.**

同様に，以下のような定理もペアノの公理系から証明できる:

デデキント＝ペアノの公理系

定理 2 ((P1) の逆)

すべての 0 と異なる数 a に対し，$a = b + 1$ となる数 b が存在する．

証明． (*)『$a = 0$ であるか，または $a = b + 1$ となる数 b が存在する』という主張がすべての数 a に対し成り立つことを帰納法で示す．

(帰納法の初め) $a = 0$ なら，(*) は明らかに成り立つ．

(帰納法のステップ) a に対して (*) が成り立ったと仮定して，$S(a)$ に対しても (*) 成り立つことを示す．ところが，$a + 1$ は $b = a$ として，$b + 1$ の形をしているから，(*) の結論は自明に成り立ってしまう．

(P7) により，以上から，(*) がすべての数 a に対し成り立つことが示せたが，明らかに，このことは定理の主張の別表現になっている． **q.e.d.**

同様に，以下のような定理もペアノの公理系から証明できる:

デデキント=ペアノの公理系

定理 2 ((P1) の逆)

すべての 0 と異なる数 a に対し，$a = b + 1$ となる数 b が存在する．

証明． (*)『$a = 0$ であるか，または $a = b + 1$ となる数 b が存在する』という主張がすべての数 a に対し成り立つことを帰納法で示す．

(帰納法の初め) $a = 0$ なら，(*) は明らかに成り立つ．

(帰納法のステップ) a に対して (*) が成り立ったと仮定して，$S(a)$ に対しても (*) 成り立つことを示す．ところが，$a + 1$ は $b = a$ として，$b + 1$ の形をしているから，(*) の結論は自明に成り立ってしまう．

(P7) により，以上から，(*) がすべての数 a に対し成り立つことが示せたが，明らかに，このことは定理の主張の別表現になっている．

q.e.d.

同様に，以下のような定理もペアノの公理系から証明できる:

デデキント＝ペアノの公理系

定理 2 ((P1) の逆)

すべての 0 と異なる数 a に対し，$a = b + 1$ となる数 b が存在する．

証明． (*)『$a = 0$ であるか，または $a = b + 1$ となる数 b が存在する』という主張がすべての数 a に対し成り立つことを帰納法で示す．

(帰納法の初め) $a = 0$ なら，(*) は明らかに成り立つ．
(帰納法のステップ) a に対して (*) が成り立ったと仮定して，$S(a)$ に対しても (*) 成り立つことを示す．ところが，$a + 1$ は $b = a$ として，$b + 1$ の形をしているから，(*) の結論は自明に成り立ってしまう．

(P7) により，以上から，(*) がすべての数 a に対し成り立つことが示せたが，明らかに，このことは定理の主張の別表現になっている． **q.e.d.**

同様に，以下のような定理もペアノの公理系から証明できる:

デデキント＝ペアノの公理系

定理 2 ((P1) の逆)

すべての 0 と異なる数 a に対し，$a = b + 1$ となる数 b が存在する．

証明． (*)『$a = 0$ であるか，または $a = b + 1$ となる数 b が存在する』という主張がすべての数 a に対し成り立つことを帰納法で示す．

(帰納法の初め) $a = 0$ なら，(*) は明らかに成り立つ．

(帰納法のステップ) a に対して (*) が成り立ったと仮定して，$S(a)$ に対しても (*) 成り立つことを示す．ところが，$a + 1$ は $b = a$ として，$b + 1$ の形をしているから，(*) の結論は自明に成り立ってしまう．

(P7) により，以上から，(*) がすべての数 a に対し成り立つことが示せたが，明らかに，このことは定理の主張の別表現になっている．

q.e.d.

同様に，以下のような定理もペアノの公理系から証明できる:

デデキント＝ペアノの公理系

定理 2 ((P1) の逆)

すべての 0 と異なる数 a に対し，$a = b + 1$ となる数 b が存在する．

証明．(*)『$a = 0$ であるか，または $a = b + 1$ となる数 b が存在する』という主張がすべての数 a に対し成り立つことを帰納法で示す．

(帰納法の初め) $a = 0$ なら，(*) は明らかに成り立つ．
(帰納法のステップ) a に対して (*) が成り立ったと仮定して，$S(a)$ に対しても (*) 成り立つことを示す．ところが，$a + 1$ は $b = a$ として，$b + 1$ の形をしているから，(*) の結論は自明に成り立ってしまう．

(P7) により，以上から，(*) がすべての数 a に対し成り立つことが示せたが，明らかに，このことは定理の主張の別表現になっている．

q.e.d.

同様に，以下のような定理もペアノの公理系から証明できる:

デデキント=ペアノの公理系

定理 2 ((P1) の逆)

すべての 0 と異なる数 a に対し，$a = b + 1$ となる数 b が存在する．

証明．(*)『$a = 0$ であるか，または $a = b + 1$ となる数 b が存在する』という主張がすべての数 a に対し成り立つことを帰納法で示す．

(帰納法の初め) $a = 0$ なら，(*) は明らかに成り立つ．
(帰納法のステップ) a に対して (*) が成り立ったと仮定して，$S(a)$ に対しても (*) 成り立つことを示す．ところが，$a + 1$ は $b = a$ として，$b + 1$ の形をしているから，(*) の結論は自明に成り立ってしまう．

(P7) により，以上から，(*) がすべての数 a に対し成り立つことが示せたが，明らかに，このことは定理の主張の別表現になっている． **q.e.d.**

同様に，以下のような定理もペアノの公理系から証明できる:

デデキント＝ペアノの公理系

定理 3

(1) すべての $x, y,$ に対し， $x + y = y + x$ が成り立つ.
(2) すべての x, y, z に対し， $(x + y) + z = x + (y + z)$ が成り立つ.

$x \leq y$ を $y = x + u$ となるような数 u が存在すること，と定義する．このとき， $\leq$ は順序の持つべき性質をすべて満たす:

定理 4

(1) すべての x, y, z に対し， $x \leq y, y \leq z$ なら， $x \leq z$ である.
(2) すべての x, y に対し,（少なくとも） $x \leq y$ または $y \leq x$ のどちらか一方が成り立つ.
(3) すべての x, y に対し， $x \leq y$ かつ $y \leq x$ なら $x = y$ である.

定理 5

数 x に対する命題 $\varphi(x)$ について，もし $\varphi(x)$ を満たす数 x が少なくとも一つは存在するなら， $\varphi(x)$ を満たす数のうち（上の $\leq$ に関して）最小のものが存在する.

デデキント＝ペアノの公理系

定理 3

(1) すべての $x, y,$ に対し，$x+y=y+x$ が成り立つ．
(2) すべての x, y, z に対し，$(x+y)+z=x+(y+z)$ が成り立つ．

$x \leq y$ を $y=x+u$ となるような数 u が存在すること，と定義する．このとき，$\leq$ は順序の持つべき性質をすべて満たす:

定理 4

(1) すべての x, y, z に対し，$x \leq y, y \leq z$ なら，$x \leq z$ である．
(2) すべての x, y に対し,（少なくとも）$x \leq y$ または $y \leq x$ のどちらか一方が成り立つ．
(3) すべての x, y に対し，$x \leq y$ かつ $y \leq x$ なら $x=y$ である．

定理 5

数 x に対する命題 $\varphi(x)$ について，もし $\varphi(x)$ を満たす数 x が少なくとも一つは存在するなら，$\varphi(x)$ を満たす数のうち（上の $\leq$ に関して）最小のものが存在する．

デデキント＝ペアノの公理系

定理 3

(1) すべての $x, y,$ に対し, $x + y = y + x$ が成り立つ.
(2) すべての x, y, z に対し, $(x + y) + z = x + (y + z)$ が成り立つ.

$x \leq y$ を $y = x + u$ となるような数 u が存在すること，と定義する. このとき, $\leq$ は順序の持つべき性質をすべて満たす:

定理 4

(1) すべての x, y, z に対し, $x \leq y, y \leq z$ なら, $x \leq z$ である.
(2) すべての x, y に対し,（少なくとも） $x \leq y$ または $y \leq x$ のどちらか一方が成り立つ.
(3) すべての x, y に対し, $x \leq y$ かつ $y \leq x$ なら $x = y$ である.

定理 5

数 x に対する命題 $\varphi(x)$ について，もし $\varphi(x)$ を満たす数 x が少なくとも一つは存在するなら, $\varphi(x)$ を満たす数のうち（上の $\leq$ に関して）最小のものが存在する.

デデキント＝ペアノの公理系

定理 3

(1) すべての $x, y,$ に対し，$x + y = y + x$ が成り立つ．
(2) すべての x, y, z に対し，$(x + y) + z = x + (y + z)$ が成り立つ．

$x \leq y$ を $y = x + u$ となるような数 u が存在すること，と定義する．このとき，$\leq$ は順序の持つべき性質をすべて満たす:

定理 4

(1) すべての x, y, z に対し，$x \leq y, y \leq z$ なら，$x \leq z$ である．
(2) すべての x, y に対し,（少なくとも）$x \leq y$ または $y \leq x$ のどちらか一方が成り立つ．
(3) すべての x, y に対し，$x \leq y$ かつ $y \leq x$ なら $x = y$ である．

定理 5

数 x に対する命題 $\varphi(x)$ について，もし $\varphi(x)$ を満たす数 x が少なくとも一つは存在するなら，$\varphi(x)$ を満たす数のうち（上の $\leq$ に関して）最小のものが存在する．