数学の考え方

2009 年春学期@中部大学

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp
http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

第 12/13 回目の講義 (August 4, 2009 (20:48) 版)

7 月 15 日（水曜日）5-6 時限目（13:35〜15:05）934 教室
（7 月 29 日（水曜日）5-6 時限目（13:35〜15:05）934 教室）
7 月 28 日（火曜日）9-10 時限目（17:05〜18:35）946 教室

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

幾何学的直観と代数的直観

- ここまででは，主に，「数学を厳密に展開するにはどうしたらよいか?」，という観点から話を進めてきたが，これは，主に，数学の記述に関する問題と言える．

  この考察は，「どうやったら数学の定理を発見できるか?」，「どうやったら新しい定理の証明ができるか?」という発見法 (heuristic) に関する問に直接の答を与えるものではない．

- この文脈で，数学を厳密に定式化するために幾何学的直観を記述から排除する，という例を幾つか見た（例えば $\varepsilon\delta$-論法の導入など）．

- しかし，定理や，定理の証明が「見える」ようになるためには，逆に，すべての直観を総動員する必要がある．特に幾何学的な直観は時に大きな思考の跳躍を可能にすることがある．

- そのようなときに総動員される直観として，幾何学的直観，代数的直観と呼ぶことのできるものがある．今回は，これについて考察してみる．

幾何学的直観による証明の例

次のハンガリーの女性数学者エスター・クライン (Ester Szekeres (Klein), 1910–2005) による定理の証明は 幾何学的直観を積極的に用いることの例の一つになっている:

定理 1 (エスター・クラインの定理)

平面上に任意の 5 点が与えられて，それらのうちのどの 3 点も同一直線上にないとするとき，それらの 5 点のうちの 4 点をうまく選んで，この 4 点が凸四角形の頂点になっているようにすることができる.

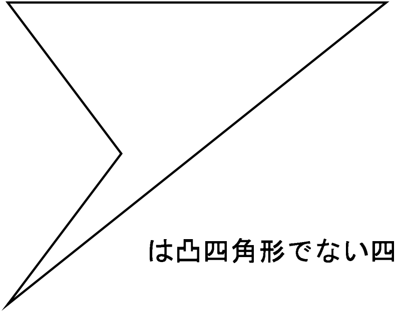
多角形が**凸（とつ）**とは，多角形の内部にあるどの 2 点を結ぶ直線も多角形の内部に含まれていること.

幾何学的直観による証明の例

定理 1 (エスター・クラインの定理)

平面上に任意の 5 点が与えられて，それらのうちのどの 3 点も同一直線上にないとするとき，それらの 5 点のうちの 4 点をうまく選んで，この 4 点が凸四角形の頂点になっているようにすることがにできる.

多角形が **凸（とつ）** とは，多角形の内部にあるどの 2 点を結ぶ直線も多角形の内部に含まれていること.
例えば:



は凸四角形でない四角形の例である.

幾何学的直観による証明の例

定理 1 (エスター・クラインの定理)

平面上に任意の *5* 点が与えられて，それらのうちのどの *3* 点も同一直線上にないとするとき，それらの *5* 点のうちの *4* 点をうまく選んで，この *4* 点が凸四角形の頂点になっているようにすることがにできる．

証明． 定理でのような 5 つの点が平面上に与えられたとして，平面を板のようなものと思って 与えられた 5 つの点にくぎを打ちつけ， その回りにゴム輪をかける ことを考える．

このとき，ゴム輪が，3 本のくぎにかかる場合と 4 本のくぎにかかる場合と 5 本のくぎにかかる場合の 3 つの場合がありえる．

もしゴム輪が 4 本のくぎにかかっている なら，これらの 4 本のくぎに対応する 4 つの点は求めるようなもの．

5 本のくぎにかかっている なら，そのうちの 4 本を勝手に選び，それらに対応する 4 点をとれば，これらが求めるもの．

幾何学的直観による証明の例

定理 1 (エスター・クラインの定理)

平面上に任意の *5* 点が与えられて，それらのうちのどの *3* 点も同一直線上にないとするとき，それらの *5* 点のうちの *4* 点をうまく選んで，この *4* 点が凸四角形の頂点になっているようにすることがにできる．

証明の続き．　もしゴム輪が 3 本のくぎにかかっている なら，残りの 2 本のくぎはゴム輪の作る三角形の内側にある．

ゴム輪のかかっている 3 つのくぎに対応する点をそれぞれ A, B, C, と呼ぶことする．内側にある 2 点は D, E, とよぶことにする．

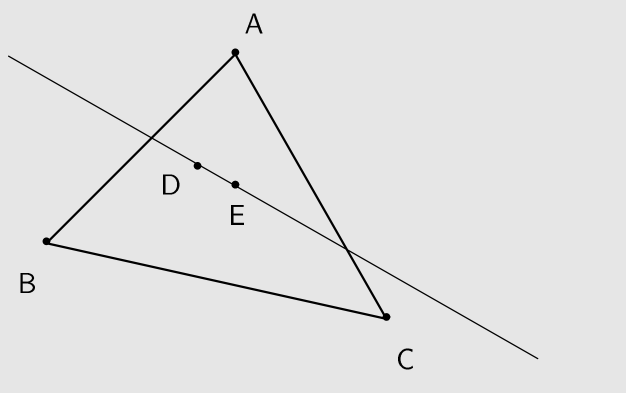
5 点が,「それらのうちのどの 3 点も同一直線上にない」という条件を満たすことから，D と E を結ぶ直線は，ゴム輪の作る三角形の三辺のうちの二辺を交差し，外側の三角形の頂点は通らないことがわかる．

幾何学的直観による証明の例

定理 1 (エスター・クラインの定理)

平面上に任意の 5 点が与えられて，それらのうちのどの 3 点も同一直線上にないとするとき，それらの 5 点のうちの 4 点をうまく選んで，この 4 点が凸四角形の頂点になっているようにすることがにできる.

証明の続き. たとえば，DE を D 側にのばすと AB と交差し，E 側にのばすと CA と交差するなら，点 B, C, E, D が求めるもの.



q.e.d.

代数的直観

ここで,「代数的直観」と言っているのは，計算に関する直観のようなものである.

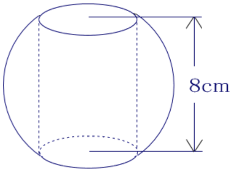
- たとえば，x と y を含む式が x と y に関し対称な形をしているとき，x に関する計算結果が判っているときには，y に関する対応する計算結果は，計算をしてみなくても，x に関する計算結果の x と y を入れかえることで得られる.

- 幾何学的な意味に拘泥（こうでい）して考えが先に進まなくなってしまうときには，むしろ，とりあえず機械的に計算して結果を出してしまった方がいいこともある.
例えば:

代数的直観

半径が 4 cm 以上の球から，球の中心を断面の中心に持つ円筒と交わる部分をくり抜き、残った領域の高が 8 cm となるようにするとき，この領域の体積は球の半径 $r \geqq 4$ に依存しないことを示せ.

（参考 web-page: 『数学博物館』）

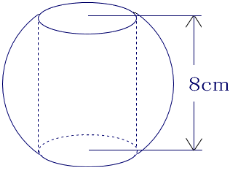


この領域の体積が $r \geqq 4$ に依存しないことが示せれば，$r = 4$ のとき，この領域は球自身と一致するから，その体積は，

$\frac{4}{3}\pi \times 4^3 = \frac{256}{3}\pi$ (cm^3) である.

半径が 4 cm 以上の球から，球の中心を断面の中心に持つ円筒と交わる部分をくり抜き、残った領域の高が 8 cm となるようにするとき，この領域の体積は球の半径 $r \geqq 4$ に依存しないことを示せ．

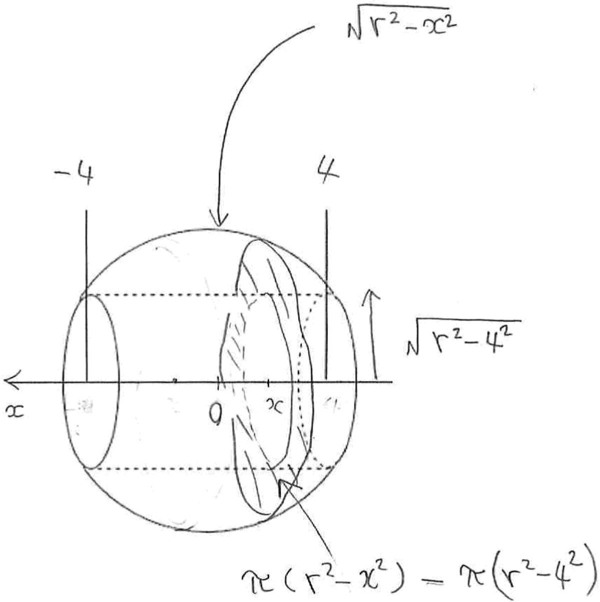
（参考 web-page: 『数学博物館』）



この証明では，幾何学的な考察をあきらめて，思いきって積分計算をしてみると，

$$\int_{-4}^{4} \pi(r^2-x^2)-\pi(r^2-16)dx = \pi\int_{-4}^{4} -x^2+16dx = \pi\left[-\frac{1}{3}x^3+16x\right]_{-4}^{4} = \frac{256}{3}\pi$$

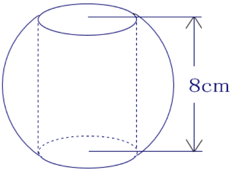
となり，体積は半径 r に依存しないことが確かめられる．


$\sqrt{r^2-x^2}$
-4
4
$\sqrt{r^2-4^2}$
x
0
x
$\pi(r^2-x^2)-\pi(r^2-4^2)$

代数的直観

半径が 4 cm 以上の球から，球の中心を断面の中心に持つ円筒と交わる部分をくり抜き、残った領域の高が 8 cm となるようにするとき，この領域の体積は球の半径 $r \geqq 4$ に依存しないことを示せ．

（参考 web-page: 『数学博物館』）



領域の体積が球の半径 r に依存しないことだけを示すためには，最後まで計算してみる必要はない:

$$\int_{-4}^{4} \pi(r^2 - x^2) - \pi(r^2 - 16)\ dx = \pi \int_{-4}^{4} -x^2 + 16\ dx$$

と整理した段階で，この値が r に依存しないことがわかる．

不可能性の証明

- 数学では,「…は不可能である」 という形の命題が証明されることがある.
- 例: ヒッパソスの定理は,「$\sqrt{2}$ を分数として現わすことは不可能である」と読みなおすことができる.
- 「…は可能である」ということの証明には, どう可能かを具体的に示せばよいが,「…は不可能である」ということの証明には, 本質的な数学的なアイデアが必要になることが多い.
- 「…は不可能である」ということを言うためには, ここで問題としている「…」が何かが厳密に規定されていることが必要になることが多いので, これまでに話してきた, 数学の厳密な定式化のプロセスが不可欠となる.

不可能性の証明

次は，古典幾何学の三大問題と言われる，ギリシャ時代に出された問題である:

(1) 与えられた正立方体のちょうど2倍の体積を持つ正立方体を作れ.

(2) 与えられた円と同じ面積を持つ正方形を作れ.

(3) 与えられた角を三等分せよ.

- 上の問題は一見あたりまえで簡単に見える:

(1): 一辺が a の正立方体の体積は，a^3 だから，この二倍の体積 $2a^3$ を持つ正立方体は，この値の 3 乗根 $\sqrt[3]{2}a$ を一辺の長さとする正立方体を作ればよい.

(2): 半径が r の円板の面積は πr^2 だから，これと同じ面積を持つ正方形としては，この値の平方根 $\sqrt{\pi}r$ を一辺の長さとする正方形を作ればよい.

(3): 角が θ なら $\dfrac{1}{3}\theta$ の角度の角をとればよい.

不可能性の証明

古典幾何学の三大問題の正しい解釈:

(1) 与えられた正立方体のちょうど２倍の体積を持つ正立方体を定規とコンパスだけを使って作図する一般的な方法を与えよ.

(2) 与えられた円と同じ面積を持つ正方形を定規とコンパスだけを
使って作図する一般的な方法を与えよ.

(3) 与えられた角を三等分を定規とコンパスだけを使って作図する
一般的方法を与えよ.

▶ 三大問題を，上のように解釈すると，(1), (2), (3) はすべて不可能であることが，“最近” 分かった．ただし，ここでの “最近” は紀元前のギリシャ時代に比べて最近ということで，19 世紀から 20 世紀初頭にかけてのことである.

不可能性の証明

(1) が不可能であることの証明のアイデア

(1) のためには，平面に原点と x-軸，y-軸と単位長が与えられたとき，$\sqrt[3]{2}$ が 作図できればよい．

定規とコンパスを（有限回）使って作図できる点の座標は，有理数から出発して，四則演算と $\sqrt{\ }$ の演算を有限回行なって得られるような数（$\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ など）である．

ところが，$\sqrt[3]{2}$ はこのような数の中に入っていない（このことを厳密に示すには，ガロワの理論という 19 世紀の初めになって作られた理論が必要になる）．

したがって，(1) の作図は不可能である．

ガロワ
Evariste Galois
(1811（文化 8 年） – 1832（天保 3 年））

不可能性の証明

- (3) の不可能性もガロアの理論を使って証明できる.
- (2) の不可能性は，次の定理と (1) の証明と同様の議論からできる:

定理 2 (Lindemann (1882 明治 15 年))

π を根とする整数係数の代数方程式は存在しない.

- どの整数係数の代数方程式の根にもならないような数のことを超越数という．もちろん実数 r が超越数なら r は無理数である. $\sqrt{2}$ は無理数だが $x^2 - 2 = 0$ の根だから超越数ではない.
- 上のような証明によって，古典幾何学の三大問題 は，問題が出されてから 2500 年以上たってやっと解かれた.

不可能性の証明

定理 3 ((Paolo Ruffini 1799), Miels Henrik Abel 1824)

5 次以上の方程式の解の公式（方程式の係数と四則演算と n 乗根の組合せで表わせる公式）は存在しない.

アーベル
Niels Henrik Abel
(1802（享和 2 年）–1829（文政 12 年）)

- この定理は現在の教科書ではガロア理論を用いて証明されているが，アーベルがこの結果を得たのはガロワより前である.

不可能性の証明

定理 3 ((Paolo Ruffini 1799), Miels Henrik Abel 1824)

5 次以上の方程式の解の公式（方程式の係数と四則演算と n 乗根の組合せで表わせる公式）は存在しない.

- 一次方程式 $ax = b$ $(a \neq 0)$ の解は $x = \dfrac{b}{a}$ とあらわせる.
- 二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ の解は
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ とあらわせる.
- 三次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ の解をあらわす式はベニス（現イタリア）の数学者 Nicolo Fontana (1500（明応 9 年）– 1557（天文（てんぶん）26 年）（室町時代））によって得られている.
- 四次方程式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ $(a \neq 0)$ の解をあらわす式はボローニャ（現イタリア）の数学者 Lodovico Ferrari (1522（明応 31 年）– 1565（天文（てんぶん）34 年））によって得られている.

不可能性の証明

参考書

- 矢野 健太郎, 一松 信 著, 角の三等分, ちくま学芸文庫.