

数学の考え方

2009 年春学期@中部大学

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

中部大学 (Chubu Univ.)

`fuchino@isc.chubu.ac.jp`

`http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/`

第 2 回目の講義 (April 29, 2009 (22:50) 版)

4 月 15 日 (水曜日) 5-6 時限目 (13:35~15:05) 934 教室

4 月 21 日 (火曜日) 9-10 時限目 (17:05~18:35) 946 教室

このスライドは p^LT_EX + beamer class で作成しています.

1.1 文字定数, 文字変数, 記号の積極的な使用

数学の考え方 (2/11)

数学では色々な新しい (見慣れない) 記号が使われる. 例:

$$\sqrt{2}$$

▶ $\sqrt{2}$ で, 二乗すると 2 になるような正の数をあらわす.

1.1 文字定数, 文字変数, 記号の積極的な使用 (3)

数学の考え方 (4/11)

問題点: \sqrt{a} という記号が問題なく使えるためには, \sqrt{a} のあらわす対象が, 常に一意に存在することが保証されていなくてはならない. つまり, 次が示せていなくてはならない:

定理 1

すべての正の数 a に対して, 二乗すると a になるような正の数が存在する.

定理 2

すべての正の数 a に対して, 二乗すると a になるような正の数は (存在するとすれば) ただ一つである.

定理 1 は, ちゃんと証明するのは簡単ではない. これをちゃんと証明するには, 数とは何か? ということに対してきちんとした答を出さなくてはならなくなる (これについては後で論じる).

定理 2 の定理は, 中学校の数学の知識で証明できる:

1.1 文字定数, 文字変数, 記号の積極的な使用 (4)

数学の考え方 (5/11)

定理 2

すべての正の数 a に対して, 二乗すると a になるような正の数は (存在するとすれば) ただ一つである.

定理 2 の証明のために, まず次の補題 (ほだい: 他の命題の証明につかう補助的な命題) を証明しておく:

補題 3

$c < d$ を満たす 2 つの正の数 c, d に対して $c^2 < d^2$ が常に成り立つ.

証明. $d = (d - c) + c$ と $0 < d - c, c$ に注意する. 最初の式の両辺を二乗すると, $d^2 = \underbrace{(d - c)^2 + 2(d - c)c + c^2}_{>0}$ だから,

$d^2 > c^2$ がわかる.

q.e.d.

1.1 文字定数, 文字変数, 記号の積極的な使用 (5)

数学の考え方 (6/11)

注意: ▶ たとえば, $-10 < 2$ だが, $2^2 < (-10)^2$ だから, 補題 3 で, c と d がともに正の数であるという条件は必要である.

▶ “q.e.d.” は証明の終りを示している. ラテン語の “quod erat demonstrandum” (which was to be proved). 証明の終りを示す記号としては, 他にも “□” や “■” や “◆” などの記号が使われることもある.

定理 2 の補題 3 からの証明: b を $b^2 = a$ となる正の数とする. b' を b と異なる正の数とする. このとき $b' < b$ か $b < b'$ のどちらかであることに注意する. $b' < b$ なら, 補題 3 から, $b'^2 < b^2 = a$ となり, したがって, $b'^2 \neq a$ である. 同様に $b < b'$ なら, 補題 3 から, $a = b^2 < b'^2$ となり, やはり $b'^2 \neq a$ である. したがって, この b 以外には二乗すると a となる正の数は存在しないことがわかった. q.e.d.

数学で用いられる記号のなかには、いつでも同じ意味で用いられるものも多い。例えば:

- ▶ $\sqrt{\cdot}$ は (ふつうには) いつでも “ルート” の意味で用いられる。
- ▶ 実数 (数直線上の点としてあらわせる数) の全体を \mathbb{R} であらわす。(実数: real numbers)
- ▶ A を数学的な対象物の集まり (集合: しゅうごう) とするとき, “ $a \in A$ ” で “ a は A の要素 (の一つ) である” をあらわす。たとえば “ $a \in \mathbb{R}$ とする” と言うのは, “ a をある実数とする” と言うのと同じことである。(要素: element $e \rightarrow \epsilon \rightarrow \in$)

記号は (ヨーロッパの言語での) “語呂合せ” で決められていることが多いので, ヨーロッパ語での記号の読みなどの由来を知っていると, なぜその記号が選ばれたのかが推測できて憶えやすい。

数学で用いられる記号には、ひとつながりの議論の中で使われるような使われかたをするものも多い。例えば:

▶ “すべての $a \in \mathbb{R}$ に対し、 $a^2 \geq 0$ が成り立つ。”と言ったときの a は、この文章の中で使いきられている。たとえば、“すべての $a \in \mathbb{R}$ に対し、 $a^2 \geq 0$ が成り立つ。ここで $a \in \mathbb{R}$ を $a \geq 4$ を満たすものとするとき、…”と言ったときには、最初の文での a とそれ以降の部分での a は別物である。

▶ “ f を \mathbb{R} から \mathbb{R} への関数とする。このとき…” (さらに記号をつかってこれを “ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とするとき…” とあらわすこともある) ここでの f は、前の例の a と同じように、この文に続くひとつながりの議論の中だけで使われる記号である。前の a が数をあらわしていたのに対し f が関数 (function) をあらわしていることに注意。

注意: 集合 A, B に対し、 f が A から B への関数 (または写像) とは、 f は各々の $a \in A$ に対して、ある B の要素を対応させる “規則” であること。

ローカルな記号 (2)

注意: 集合 A, B に対し, f が A から B への関数 (または写像) とは, f は各々の $a \in A$ に対して, ある B の要素を対応させる “規則” であること.

f によって $a \in A$ に対応づけられる B の要素を $f(a)$ と書く. ただし “規則” と言っても, 対応規則が明示的に与えられているとはかぎらない.

関数の定義の例:

$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$ と定義する. このとき, ...

項は単語で方程式は文である

項 (term: 日本語では“式”と言うことも多い. たとえば“多項式”はここで言う項の一つである) は単語である.

項の例:

- ▶ $0, 2, 3, \dots$
- ▶ $\sqrt{2}, (\sqrt{2})^2, \dots$
- ▶ $x^2 + 3x - 4, \dots$

これに対し, 方程式 (formula: 不等式もここでは方程式の一種と考える. 日本語ではこれも“式”とよぶことがありまぎらわしい) は文である. ここでは, “式”で英語の formula に対応する概念をあらわすことにする.

式 (方程式) の例:

- ▶ $2 = (\sqrt{2})^2$ “2 と $(\sqrt{2})^2$ であらわされる数は等しい”
- ▶ $3 < 2$ “3 より 2 の方が真に大きい”

文法的に正しい文でも内容の正しい文も正しくない文もあることに注意. 式の中には, それが正しいものかどうか簡単には判定できないようなものもある.

実は、数学的な主張（文、命題）はすべて、ある種の拡張された式として、あらわすことができる。このような式のことを論理式という（英語ではこのような式のことも formula と呼ぶ）。

例えば、“すべての 0 より真に大きな実数 x に対し、二乗すると x になるような実数がただ一つ存在する” という主張は

$$(\forall x \in \mathbb{R})[x > 0 \rightarrow ((\exists y \in \mathbb{R})[y > 0 \wedge y^2 = x] \wedge (\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})[y > 0 \wedge z > 0 \wedge y^2 = x \wedge z^2 = x \rightarrow y = z])]$$

であらわすことができる。

可読性のため、数学の議論を実際に論理式で書くことは普通はしないが、数学の命題がすべて論理式で書きくだせるという事実は、それ自身として重要である。