

# 数学の考え方

2009 年春学期@中部大学

Sakaé Fuchino ( 渚野 昌 )

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp

<http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/>

第 4 回目の講義 (May 19, 2009 (23:34) 版)

4 月 29 日 (水曜日) 5-6 時限目 (13:35~15:05) 934 教室

5 月 19 日 (火曜日) 9-10 時限目 (17:05~18:35) 946 教室

このスライドは p<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X + beamer class で作成しています.

定理 1 (Hippasus, 紀元前 6 世紀ごろ)

$\sqrt{2}$  は有理数でない.

▶ **有理数** とは, 分母, 分子を整数とするような分数として表せる数のことである.

▶  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right), \frac{56}{73}$  などは有理数である.

▶ 整数  $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  も, それぞれ  $\dots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots$  とあらわせるので, 有理数である.

▶ 後で証明するように, すべての有理数は **循環小数** としてあらわせる. たとえば,  $\frac{2}{3} = 0.6666\dots = 0.\dot{6}$ ,  $\frac{56}{73} = 0.7671232876712328\dots = 0.7\dot{6}71232\dot{8}$  である. ただし, 有限長の分数表現は末尾に 0 が続いている循環小数とみなす. たとえば,  $3.7$  は  $3.7000\dots = 3.7\dot{0}$  と見ることで, 循環小数と考える. 逆にすべての循環小数は有理数である.

▶ 定理 1 はギリシャの数学者ヒッパソス ( $\text{Ἰππασσος}$ ) によって証明されたと言われている.

## 証明の例 (2)

定理 1 (Hippasus, 紀元前 6 世紀ごろ)

$\sqrt{2}$  は有理数でない。

証明. 背理法 による.  $\sqrt{2}$  が有理数だったと仮定して, 矛盾を示す.  $\sqrt{2}$  が有理数なら,

$$(1) \sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

となるような正の整数  $m, n$  がとれる. ただし, 分数表現  $\frac{m}{n}$  はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して, 移項すると,

$$(2) 2n^2 = m^2$$

となるから,  $m^2$  は 2 の倍数 (つまり偶数) である. このことから  $m$  も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 整数  $m'$  で  $m = 2m'$  となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

$$(3) n^2 = 2m'^2$$

となるから, 上と同様の議論で,  $n$  も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 分数表現  $\frac{m}{n}$  は 2 で約分できるが, これは, 最初の仮定に矛盾である.

## 証明の例 (3)

有理数でない実数を、無理数とよぶ。定理 1 は、

『 $\sqrt{2}$  は無理数である』

と表現することもできる。

- ▶ 無理数  $a, b$  で  $a + b$  が有理数になるようなものが存在する  
(例:  $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ ) .
- ▶ 無理数  $a, b$  で  $ab$  が有理数になるようなものも存在する  
(例:  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ) .
- ▶ 無理数  $a, b$  で  $a^b$  が有理数になるようなものは存在するだろうか?

定理 2 (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年))

無理数  $a, b$  で、 $a^b$  が有理数になるようなものが存在する。

## 証明の例 (4)

定理 2 (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年))

無理数  $a, b$  で,  $a^b$  が有理数になるようなものが存在する.

証明. 場合分けで証明する:

場合 1.  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  が有理数である場合: このときには,  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{2}$  とすればよい.

場合 2.  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  が有理数でない (つまり無理数である) 場合: このときには,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる. したがって,  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ,  $b = \sqrt{2}$  とすればよい. **q.e.d.**

## 証明の例 (5)

注意:

実は、定理 2 の証明に出てくる  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  は、Gelfond-Schneider の定理とよばれる Gelfond と Schneider という二人の数学者によって独立に 1934 年（昭和 9 年）に得られた（少し難しい）定理を使うと、無理数であることが証明できる。

したがって、実際には、 $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ,  $b = \sqrt{2}$  が定理 2 を示す例になっているが、定理 2 の証明は、場合分けをすることで、このような高度な結果を用いることなく、きわめて初等的に（かつエレガントに）定理を示している。

## 証明の例 (6)

### 定理 3

すべての自然数  $n$  に対して,

$$(4) \quad 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

が成り立つ.

注意:

$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$  は, “0 から  $n$  までの自然数を順に足したときの和” をあらわしている.

したがって,  $n = 0$  のときには, この和は  $0$  である. また  $n = 1$  のときには, この和は  $0 + 1 = 1$  である.

複数の項の和 (sum) をあらわすときに使う記号  $\sum$  を用いると,  $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$  は,

$$\sum_{k=0}^n k \quad \text{または,} \quad \sum_{k=0}^n k$$

とあらわせる.

## 定理 3

すべての自然数  $n$  に対して,

$$(4) \quad 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

が成り立つ.

証明. 数学的帰納法 で証明する.

帰納法の初め:  $n$  が 0 のときには,  $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$  も  $\frac{n(n+1)}{2}$  も 0 となるから等式 (4) は成り立つ.

帰納法のステップ:  $n = k$  に対して, (4) が成り立ったと仮定して,  $n = k + 1$  のときにも成り立つことを示す. 仮定から,  $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$  だから,

$$(5) \quad 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1)$$

である. (5) の右辺は,

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$  となるから, (4) は  $n = k + 1$  に対しても成り立つことがわかる.

q.e.d.



# 証明の例 (8)

## 定理 3 の (直観的な) 別証

The diagram illustrates the proof of the sum of the first  $n$  natural numbers. It shows two stages of the process:

- Top Stage:** A series of vertical bars of increasing height, labeled  $0, 1, 2, 3, \dots, n$ . An arrow points to the bar of height  $n$  with the text: "この面積が  $0+1+2+\dots+n$  に対応する" (This area corresponds to  $0+1+2+\dots+n$ ).
- Bottom Stage:** The same series of bars is shown, but a second set of identical bars is placed on top of the first set, shifted by one unit. The total height of the combined bars is labeled  $n$  on the right. A bracket below the bars is labeled  $n+1$ . An arrow points from the top stage to this stage with the text: "コピーを ひっくりかえして重ねる" (Copy and flip to overlap).

At the bottom, the following text explains the area calculation:

長方形の面積は  $n(n+1)$   
なのでその半分  $n(n+1)/2$   
がもとの図形の面積になる