数学の考え方

2009 年春学期@中部大学

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp
http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

第 4 回目の講義 (May 19, 2009 (23:34) 版)

4 月 29 日（水曜日）5-6 時限目（13:35～15:05）934 教室
5 月 19 日（火曜日）9-10 時限目（17:05～18:35）946 教室

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

証明の例 (1) — 前回の復習

定理 1 (Hippasus, 紀元前 6 世紀ごろ)

$\sqrt{2}$ は有理数でない.

- **有理数** とは, 分母, 分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right)$, $\frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も, それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので, 有理数である.
- 後で証明するように, すべての有理数は **循環小数** としてあらわせる. たとえば, $\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.767123287671 2328\cdots = 0.\dot{7}\dot{6}\dot{7}\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{2}\dot{8}$ である. ただし, 有限長の分数表現は末尾に 0 が続いている循環小数とみなす. たとえば, 3.7 は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで, 循環小数と考える. 逆にすべての循環小数は有理数である.
- 定理 1 はギリシャの数学者ヒッパソス ($\text{‘}I\pi\pi\alpha\sigma o\varsigma$) によって証明されたと言われている.

証明の例 (2)

定理 1 (Hippasus, 紀元前 6 世紀ごろ)
$\sqrt{2}$ は有理数でない．

証明． **背理法** による． $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して，矛盾を示す． $\sqrt{2}$ が有理数なら，

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \tag{1}$$

となるような正の整数 m, n がとれる．ただし，分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする．(1) の両辺を二乗して，移項すると，

$$2n^2 = m^2 \tag{2}$$

となるから，m^2 は 2 の倍数（つまり偶数）である．このことから m も 2 の倍数であることがわかる．したがって，整数 m' で $m = 2m'$ となるものがとれる．これを (2) に代入して整理すると

$$n^2 = 2m'^2 \tag{3}$$

となるから，上と同様の議論で，n も 2 の倍数であることがわかる．したがって，分数表現 $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが，これは，最初の仮定に矛盾である． **q.e.d.**

証明の例 (3)

有理数でない実数を，**無理数**とよぶ．定理 1 は，

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる．

- 無理数 a, b で $a+b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$）．
- 無理数 a, b で ab が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$）．
- 無理数 a, b で a^b が有理数になるようなものは存在するだろうか?

定理 2 (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年))

無理数 a, b で，a^b が有理数になるようなものが存在する．

証明の例 (4)

定理 2 (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年))

無理数 a, b で，a^b が有理数になるようなものが存在する．

証明． 場合分けで証明する:

場合 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数である場合: このときには，$a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい．

場合 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数でない（つまり無理数である）場合: このときには，

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる．したがって，$a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい． **q.e.d.**

証明の例 (5)

注意:

実は，定理 2 の証明に出てくる $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は，
Gelfond-Schneider の定理とよばれる Gelfond と Schneider という二人の数学者によって独立に 1934 年（昭和 9 年）に得られた（少し難しい）定理を使うと，無理数であることが証明できる．

したがって，実際には，$a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$，$b = \sqrt{2}$ が定理 2を示す例になっているが，定理 2 の証明は，場合分けをすることで，このような高度な結果を用いることなく，きわめて初等的に（かつエレガントに）定理を示している．

証明の例 (6)

定理 3

すべての自然数 n に対して，

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ．

注意：

$0+1+2+3+\cdots+n$ は，“0 から n までの自然数を順に足したときの和” をあらわしている．

したがって，$n=0$ のときには，この和は 0 である．また $n=1$ のときには，この和は $0+1=1$ である．

複数の項の和 (sum) をあらわすときに使う記号 $\sum$ を用いると，$0+1+2+3+\cdots+n$ は，

$\sum_{k=0}^{n} k$ または，$$\sum_{k=0}^{n} k$$

とあらわせる．

証明の例 (7)

定理 3

すべての自然数 n に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

証明. **数学的帰納法** で証明する.

帰納法の初め: n が 0 のときには, $0+1+2+3+\cdots+n$ も $\frac{n(n+1)}{2}$ も 0 となるから等式 (4) は成り立つ.

帰納法のステップ: $n=k$ に対して, (4) が成り立ったと仮定して, $n=k+1$ のときにも成り立つことを示す. 仮定から, $0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ だから,

(5) $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

である. (5) の右辺は,
$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ となるから, (4) は $n=k+1$ に対しても成り立つことがわかる. **q.e.d.**

証明の例 (8)

定理 3 の（直観的な）別証