数 学 の 考 え 方

2009 年春学期@中部大学

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp

http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

第 5 回目の講義 (May 27, 2009 (00:10) 版)

5 月 13 日（水曜日）5-6 時限目（13:35〜15:05）934 教室

5 月 26 日（火曜日）9-10 時限目（17:05〜18:35）946 教室

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

証明の例 (9) — 前回の復習

前回の定理 3 に 2 つの証明を与えた:

定理 3

すべての自然数 n に対して,

$$0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{4}$$

が成り立つ.

- 2 番目の証明では, $0+1+2+3+\cdots+n$ を図形の面積に対応させて, 直観的に議論した.
- これに対して, 1 番目の証明では, 帰納法による証明で, 直観は働きにくいが, 論理的には厳密なものになっていた.
- 新しい定理を創りだしたり, その初めての証明を与えるときには, 2 番目の証明でのように, 直観を総動員して考えて, 最終的に論理的に厳密な証明を与える, という順序で考えることが多い.

証明の例 (9) — 前回の復習

前回の定理 3 に 2 つの証明を与えた:

定理 3

すべての自然数 n に対して,

$$0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{4}$$

が成り立つ.

- 2 番目の証明では, $0+1+2+3+\cdots+n$ を図形の面積に対応させて, 直観的に議論した.
- これに対して, 1 番目の証明では, 帰納法による証明で, 直観は働きにくいが, 論理的には厳密なものになっていた.
- 新しい定理を創りだしたり, その初めての証明を与えるときには, 2 番目の証明でのように, 直観を総動員して考えて, 最終的に論理的に厳密な証明を与える, という順序で考えることが多い.

証明の例 (9) — 前回の復習

前回の定理 3 に 2 つの証明を与えた:

定理 3

すべての自然数 n に対して,

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4}$$

が成り立つ.

- 2 番目の証明では, $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ を図形の面積に対応させて, 直観的に議論した.
- これに対して, 1 番目の証明では, 帰納法による証明で, 直観は働きにくいが, 論理的には厳密なものになっていた.
- 新しい定理を創りだしたり, その初めての証明を与えるときには, 2 番目の証明でのように, 直観を総動員して考えて, 最終的に論理的に厳密な証明を与える, という順序で考えることが多い.

証明の例 (9) — 前回の復習

前回の定理 3 に 2 つの証明を与えた:

定理 3

すべての自然数 n に対して,

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4}$$

が成り立つ.

- 2 番目の証明では, $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ を図形の面積に対応させて, 直観的に議論した.
- これに対して, 1 番目の証明では, 帰納法による証明で, 直観は働きにくいが, 論理的には厳密なものになっていた.
- 新しい定理を創りだしたり, その初めての証明を与えるときには, 2 番目の証明でのように, 直観を総動員して考えて, 最終的に論理的に厳密な証明を与える, という順序で考えることが多い.

証明の例 (9) — 前回の復習

前回の定理 3 に 2 つの証明を与えた:

定理 3

すべての自然数 n に対して,

$$0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{4}$$

が成り立つ.

- 2 番目の証明では, $0+1+2+3+\cdots+n$ を図形の面積に対応させて, 直観的に議論した.
- これに対して, 1 番目の証明では, 帰納法による証明で, 直観は働きにくいが, 論理的には厳密なものになっていた.
- 新しい定理を創りだしたり, その初めての証明を与えるときには, 2 番目の証明でのように, 直観を総動員して考えて, 最終的に論理的に厳密な証明を与える, という順序で考えることが多い.

証明の例 (9) — 前回の復習

前回の定理 3 に 2 つの証明を与えた:

定理 3

すべての自然数 n に対して,

$$0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{4}$$

が成り立つ.

- 2 番目の証明では, $0+1+2+3+\cdots+n$ を図形の面積に対応させて, 直観的に議論した.
- これに対して, 1 番目の証明では, 帰納法による証明で, 直観は働きにくいが, 論理的には厳密なものになっていた.
- 新しい定理を創りだしたり, その初めての証明を与えるときには, 2 番目の証明でのように, 直観を総動員して考えて, 最終的に論理的に厳密な証明を与える, という順序で考えることが多い.

証明は定理のより深い理解を与える

一つの定理に複数の証明が与えられることは少なくない.

- 色々な考え方による証明を与えることで定理の理解が深まる.
- （プロやアマチュアの数学者が）スポーツとして他の人の思いつかなかったような証明を考えてみる，こともある.
- 18 世紀のドイツの数学者 ガウス（1777 年（安永 6 年）— 1855 年（安政 2 年））は,「すべての方程式は複素数の範囲で考えれば常に解を持つ」という代数学の基本定理に生涯にわたって 4 つの異なる証明を与えている.
- 三平方の定理 （またはピタゴラスの定理）には，数百の異なる証明が知られている.

証明は定理のより深い理解を与える

一つの定理に複数の証明が与えられることは少なくない.

- 色々な考え方による証明を与えることで定理の理解が深まる.
- （プロやアマチュアの数学者が）スポーツとして他の人の思いつかなかったような証明を考えてみる，こともある.
- 18 世紀のドイツの数学者 ガウス（1777 年（安永 6 年）— 1855 年（安政 2 年））は,「すべての方程式は複素数の範囲で考えれば常に解を持つ」という代数学の基本定理に生涯にわたって 4 つの異なる証明を与えている.
- 三平方の定理 （またはピタゴラスの定理）には，数百の異なる証明が知られている.

証明は定理のより深い理解を与える

一つの定理に複数の証明が与えられることは少なくない．

- 色々な考え方による証明を与えることで定理の理解が深まる．
- （プロやアマチュアの数学者が）スポーツとして他の人の思いつかなかったような証明を考えてみる，こともある．
- 18 世紀のドイツの数学者 ガウス（1777 年（安永 6 年）— 1855 年（安政 2 年））は,「すべての方程式は複素数の範囲で考えれば常に解を持つ」という代数学の基本定理に生涯にわたって 4 つの異なる証明を与えている．
- 三平方の定理 （またはピタゴラスの定理）には，数百の異なる証明が知られている．

証明は定理のより深い理解を与える

一つの定理に複数の証明が与えられることは少なくない.

- 色々な考え方による証明を与えることで定理の理解が深まる.
- （プロやアマチュアの数学者が）スポーツとして他の人の思いつかなかったような証明を考えてみる，こともある.

- 18 世紀のドイツの数学者 ガウス（1777 年（安永 6 年）— 1855 年（安政 2 年））は,「すべての方程式は複素数の範囲で考えれば常に解を持つ」という代数学の基本定理に生涯にわたって 4 つの異なる証明を与えている.
- 三平方の定理 （またはピタゴラスの定理）には，数百の異なる証明が知られている.

証明は定理のより深い理解を与える

一つの定理に複数の証明が与えられることは少なくない.

- 色々な考え方による証明を与えることで定理の理解が深まる.
- （プロやアマチュアの数学者が）スポーツとして他の人の思いつかなかったような証明を考えてみる，こともある.

- 18 世紀のドイツの数学者 ガウス（1777 年（安永 6 年）— 1855 年（安政 2 年））は,「すべての方程式は複素数の範囲で考えれば常に解を持つ」という代数学の基本定理に生涯にわたって 4 つの異なる証明を与えている.
- 三平方の定理 （またはピタゴラスの定理）には，数百の異なる証明が知られている.

証明は定理のより深い理解を与える

一つの定理に複数の証明が与えられることは少なくない.

- 色々な考え方による証明を与えることで定理の理解が深まる.
- （プロやアマチュアの数学者が）スポーツとして他の人の思いつかなかったような証明を考えてみる，こともある.
- 18 世紀のドイツの数学者 ガウス（1777 年（安永 6 年）— 1855 年（安政 2 年））は,「すべての方程式は複素数の範囲で考えれば常に解を持つ」という代数学の基本定理に生涯にわたって 4 つの異なる証明を与えている.
- 三平方の定理 （またはピタゴラスの定理）には，数百の異なる証明が知られている.

代数学の基本定理について

定理 4 (代数学の基本定理)

すべての方程式は（複素数の範囲で）少なくとも一つの解を持つ.

- 例えば，$x^2 + x - 2 = 0$ の解は 1 と -2 である.
- $x^2 + 2 = 0$ は実数の範囲では解を持たないが，複素数 $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ はこの方程式の解である.（i は二乗すると -1 になる " 数" をあらわす）
- $x^2 + x - 2 = 0$ の解が 1 と -2 であることから，多項式 $x^2 + x - 2$ は，$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x - (-2))$ と因数分解できる.
- $x^2 + 2 = 0$ の解が $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ であることから，多項式 $x^2 + 2$ は，$x^2 + 2 = (x - \sqrt{2}i)(x - (-\sqrt{2}i))$ と因数分解される.

もっと一般的には

定理 5 (代数学の基本定理の別表現)

任意の多項式は，複素数係数の範囲では常に一次式の積に因数分解できる.

代数学の基本定理について

定理 4 (代数学の基本定理)

すべての方程式は（複素数の範囲で）少なくとも一つの解を持つ.

- 例えば, $x^2+x-2=0$ の解は 1 と -2 である.
- $x^2+2=0$ は実数の範囲では解を持たないが, 複素数 $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ はこの方程式の解である.（i は二乗すると -1 になる “数” をあらわす）
- $x^2+x-2=0$ の解が 1 と -2 であることから, 多項式 x^2+x-2 は, $x^2+x-2=(x-1)(x-(-2))$ と因数分解できる.
- $x^2+2=0$ の解が $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ であることから, 多項式 x^2+2 は, $x^2+2=(x-\sqrt{2}i)(x-(-\sqrt{2}i))$ と因数分解される.

もっと一般的には

定理 5 (代数学の基本定理の別表現)

任意の多項式は, 複素数係数の範囲では常に一次式の積に因数分解できる.

代数学の基本定理について

定理 4 (代数学の基本定理)

すべての方程式は（複素数の範囲で）少なくとも一つの解を持つ.

- 例えば，$x^2+x-2=0$ の解は 1 と -2 である.
- $x^2+2=0$ は実数の範囲では解を持たないが，複素数 $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ はこの方程式の解である.（i は二乗すると -1 になる “数” をあらわす）
- $x^2+x-2=0$ の解が 1 と -2 であることから，多項式 x^2+x-2 は，$x^2+x-2=(x-1)(x-(-2))$ と因数分解できる.
- $x^2+2=0$ の解が $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ であることから，多項式 x^2+2 は，$x^2+2=(x-\sqrt{2}i)(x-(-\sqrt{2}i))$ と因数分解される.

もっと一般的には

定理 5 (代数学の基本定理の別表現)

任意の多項式は，複素数係数の範囲では常に一次式の積に因数分解できる.

代数学の基本定理について

定理 4 (代数学の基本定理)

すべての方程式は（複素数の範囲で）少なくとも一つの解を持つ.

- 例えば，$x^2+x-2=0$ の解は 1 と -2 である.
- $x^2+2=0$ は実数の範囲では解を持たないが，複素数 $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ はこの方程式の解である.（i は二乗すると -1 になる“数”をあらわす）
- $x^2+x-2=0$ の解が 1 と -2 であることから，多項式 x^2+x-2 は，$x^2+x-2=(x-1)(x-(-2))$ と因数分解できる.
- $x^2+2=0$ の解が $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ であることから，多項式 x^2+2 は，$x^2+2=(x-\sqrt{2}i)(x-(-\sqrt{2}i))$ と因数分解される.

もっと一般的には

定理 5 (代数学の基本定理の別表現)

任意の多項式は，複素数係数の範囲では常に一次式の積に因数分解できる.

代数学の基本定理について

定理 4 (代数学の基本定理)

すべての方程式は（複素数の範囲で）少なくとも一つの解を持つ.

- 例えば, $x^2+x-2=0$ の解は 1 と -2 である.
- $x^2+2=0$ は実数の範囲では解を持たないが, 複素数 $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ はこの方程式の解である.（i は二乗すると -1 になる " 数" をあらわす）
- $x^2+x-2=0$ の解が 1 と -2 であることから, 多項式 x^2+x-2 は, $x^2+x-2=(x-1)(x-(-2))$ と因数分解できる.
- $x^2+2=0$ の解が $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ であることから, 多項式 x^2+2 は, $x^2+2=(x-\sqrt{2}i)(x-(-\sqrt{2}i))$ と因数分解される.

もっと一般的には

定理 5 (代数学の基本定理の別表現)

任意の多項式は, 複素数係数の範囲では常に一次式の積に因数分解できる.

代数学の基本定理について

定理 4 (代数学の基本定理)

すべての方程式は（複素数の範囲で）少なくとも一つの解を持つ.

- 例えば, $x^2 + x - 2 = 0$ の解は 1 と -2 である.
- $x^2 + 2 = 0$ は実数の範囲では解を持たないが, 複素数 $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ はこの方程式の解である.（i は二乗すると -1 になる“数”をあらわす）
- $x^2 + x - 2 = 0$ の解が 1 と -2 であることから, 多項式 $x^2 + x - 2$ は, $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x - (-2))$ と因数分解できる.
- $x^2 + 2 = 0$ の解が $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ であることから, 多項式 $x^2 + 2$ は, $x^2 + 2 = (x - \sqrt{2}i)(x - (-\sqrt{2}i))$ と因数分解される.

もっと一般的には

定理 5 (代数学の基本定理の別表現)

任意の多項式は, 複素数係数の範囲では常に一次式の積に因数分解できる.

代数学の基本定理について

定理 4 (代数学の基本定理)

すべての方程式は（複素数の範囲で）少なくとも一つの解を持つ.

- 例えば, $x^2 + x - 2 = 0$ の解は 1 と -2 である.
- $x^2 + 2 = 0$ は実数の範囲では解を持たないが, 複素数 $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ はこの方程式の解である.（i は二乗すると -1 になる "数" をあらわす）
- $x^2 + x - 2 = 0$ の解が 1 と -2 であることから, 多項式 $x^2 + x - 2$ は, $x^2 + x - 2 = (x-1)(x-(-2))$ と因数分解できる.
- $x^2 + 2 = 0$ の解が $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ であることから, 多項式 $x^2 + 2$ は, $x^2 + 2 = (x - \sqrt{2}i)(x - (-\sqrt{2}i))$ と因数分解される.

もっと一般的には

定理 5 (代数学の基本定理の別表現)

任意の多項式は, 複素数係数の範囲では常に一次式の積に因数分解できる.

1.3 厳密な定義を与える

厳密な証明を行うためには，証明で用いられる用語の意味を明確にしておかなくてはならない．数学で，言葉の意味を厳密に規定することを **定義する** という．また，言葉の厳密な規定のことを **定義** (definition) という．

例.

- a を正の実数として，二乗すると a になるような正の実数を $\sqrt{a}$ であらわす（$\sqrt{a}$ の定義）．
- a を実数とするとき，$|a|$ を ... によって定める．$|a|$ は a の絶対値とよばれる．

1.3 厳密な定義を与える

厳密な証明を行うためには，証明で用いられる用語の意味を明確にしておかなくてはならない．数学で，言葉の意味を厳密に規定することを **定義する** という．また，言葉の厳密な規定のことを **定義** (definition) という．

例.

- a を正の実数として，二乗すると a になるような正の実数を $\sqrt{a}$ であらわす（$\sqrt{a}$ の定義）．
- a を実数とするとき，$|a|$ を ... によって定める．$|a|$ は a の絶対値とよばれる．

1.3 厳密な定義を与える

厳密な証明を行うためには，証明で用いられる用語の意味を明確にしておかなくてはならない．数学で，言葉の意味を厳密に規定することを **定義する** という．また，言葉の厳密な規定のことを **定義** (definition) という．

例.

- a を正の実数として，二乗すると a になるような正の実数を $\sqrt{a}$ であらわす（$\sqrt{a}$ の定義）．
- a を実数とするとき，$|a|$ を … によって定める．$|a|$ は a の絶対値とよばれる．

1.3 厳密な定義を与える

厳密な証明を行うためには，証明で用いられる用語の意味を明確にしておかなくてはならない．数学で，言葉の意味を厳密に規定することを **定義する** という．また，言葉の厳密な規定のことを **定義** (definition) という．

例.

- a を正の実数として，二乗すると a になるような正の実数を $\sqrt{a}$ であらわす（$\sqrt{a}$ の定義）．
- a を実数とするとき，$|a|$ を ... によって定める．$|a|$ は a の絶対値とよばれる．

厳密な定義を与える (2)

a を実数とするとき，$|a|$ を

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqq 0 \text{ のとき} \\ -a, & a < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定める．$|a|$ は a の絶対値とよばれる．
正確な定義が与えられて，はじめて厳密な証明が可能になる．
例えば

定理 6

すべての実数 a に対し，$\sqrt{a^2} = |a|$ が成り立つ．

証明． $a \geqq 0$ のときには，$\sqrt{\cdot}$ の定義から，$\sqrt{a^2}$ は，二乗すると a^2 になるような正の実数で，前に示したように，そのような数は一つしか存在しないから，$\sqrt{a^2} = a$ がわかる．したがって，$|a|$ の定義から，$\sqrt{a^2} = |a|$ である．

$a < 0$ のときには，$\sqrt{a^2}$ は，$-a$ である（このときには $-a > 0$ で $(-a)^2 = a^2$ だから）．したがって，$|a|$ の定義から，$\sqrt{a^2} = |a|$ がこの場合でも成り立っている． **q.e.d.**

厳密な定義を与える (2)

a を実数とするとき，$|a|$ を

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqq 0 \text{ のとき} \\ -a, & a < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定める．$|a|$ は a の絶対値とよばれる．
正確な定義が与えられて，はじめて厳密な証明が可能になる．
例えば

定理 6

すべての実数 a に対し，$\sqrt{a^2} = |a|$ が成り立つ．

証明． $a \geqq 0$ のときには，$\sqrt{\cdot}$ の定義から，$\sqrt{a^2}$ は，二乗すると a^2 になるような正の実数で，前に示したように，そのような数は一つしか存在しないから，$\sqrt{a^2} = a$ がわかる．したがって，$|a|$ の定義から，$\sqrt{a^2} = |a|$ である．

$a < 0$ のときには，$\sqrt{a^2}$ は，$-a$ である（このときには $-a > 0$ で $(-a)^2 = a^2$ だから）．したがって，$|a|$ の定義から，$\sqrt{a^2} = |a|$ がこの場合でも成り立っている． **q.e.d.**

厳密な定義を与える (2)

a を実数とするとき，$|a|$ を

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqq 0 \text{ のとき} \\ -a, & a < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定める．$|a|$ は a の絶対値とよばれる．
正確な定義が与えられて，はじめて厳密な証明が可能になる．
例えば

定理 6

すべての実数 a に対し，$\sqrt{a^2} = |a|$ が成り立つ．

証明． $a \geqq 0$ のときには，$\sqrt{\cdot}$ の定義から，$\sqrt{a^2}$ は，二乗すると a^2 になるような正の実数で，前に示したように，そのような数は一つしか存在しないから，$\sqrt{a^2} = a$ がわかる．したがって，$|a|$ の定義から，$\sqrt{a^2} = |a|$ である．

$a < 0$ のときには，$\sqrt{a^2}$ は，$-a$ である（このときには $-a > 0$ で $(-a)^2 = a^2$ だから）．したがって，$|a|$ の定義から，$\sqrt{a^2} = |a|$ がこの場合でも成り立っている．　**q.e.d.**

厳密な定義を与える (2)

a を実数とするとき，$|a|$ を

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqq 0 \text{ のとき} \\ -a, & a < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定める．$|a|$ は a の絶対値とよばれる．
正確な定義が与えられて，はじめて厳密な証明が可能になる．
例えば

定理 6

すべての実数 a に対し，$\sqrt{a^2} = |a|$ が成り立つ．

証明． $a \geqq 0$ のときには，$\sqrt{\cdot}$ の定義から，$\sqrt{a^2}$ は，二乗すると a^2 になるような正の実数で，前に示したように，そのような数は一つしか存在しないから，$\sqrt{a^2} = a$ がわかる．したがって，$|a|$ の定義から，$\sqrt{a^2} = |a|$ である．

$a < 0$ のときには，$\sqrt{a^2}$ は，$-a$ である（このときには $-a > 0$ で $(-a)^2 = a^2$ だから）．したがって，$|a|$ の定義から，$\sqrt{a^2} = |a|$ がこの場合でも成り立っている． **q.e.d.**

厳密な定義を与える (2)

a を実数とするとき，$|a|$ を

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqq 0 \text{ のとき} \\ -a, & a < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定める．$|a|$ は a の絶対値とよばれる．
正確な定義が与えられて，はじめて厳密な証明が可能になる．
例えば

定理 6

すべての実数 a に対し，$\sqrt{a^2} = |a|$ が成り立つ．

証明. $a \geqq 0$ のときには，$\sqrt{\cdot}$ の定義から，$\sqrt{a^2}$ は，二乗すると a^2 になるような正の実数で，前に示したように，そのような数は一つしか存在しないから，$\sqrt{a^2} = a$ がわかる．したがって，$|a|$ の定義から，$\sqrt{a^2} = |a|$ である．

$a < 0$ のときには，$\sqrt{a^2}$ は，$-a$ である（このときには $-a > 0$ で $(-a)^2 = a^2$ だから）．したがって，$|a|$ の定義から，$\sqrt{a^2} = |a|$ がこの場合でも成り立っている．

q.e.d.

厳密な定義を与える (2)

a を実数とするとき，$|a|$ を

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqq 0 \text{ のとき} \\ -a, & a < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定める．$|a|$ は a の絶対値とよばれる．
正確な定義が与えられて，はじめて厳密な証明が可能になる．
例えば

定理 6

すべての実数 a に対し，$\sqrt{a^2} = |a|$ が成り立つ．

証明. $a \geqq 0$ のときには，$\sqrt{\cdot}$ の定義から，$\sqrt{a^2}$ は，二乗すると a^2 になるような正の実数で，前に示したように，そのような数は一つしか存在しないから，$\sqrt{a^2} = a$ がわかる．したがって，$|a|$ の定義から，$\sqrt{a^2} = |a|$ である．

$a < 0$ のときには，$\sqrt{a^2}$ は，$-a$ である（このときには $-a > 0$ で $(-a)^2 = a^2$ だから）．したがって，$|a|$ の定義から，$\sqrt{a^2} = |a|$ がこの場合でも成り立っている． **q.e.d.**

厳密な定義を与える (3)

そこで用いられている概念の厳密な定義が与えられる前に天才的な数学者たちが理論をどんどん創りあげてしまう，ということが数学の歴史では何回も起っている.

このような場合，理論の本質にかかわる定義が明文化されないまま，一部の天才たちだけによって 共有され，研究される，という時期が続くことになる.

例えば，微分や積分の理論は，そこで中心的な役割をはたす 極限 の概念が 厳密に定義されるより前に，イギリスの ニュートン (1642 年（寛永 19 年）— 1727 年（享保（きょうほう）12 年)) や，ドイツの ライプニッツ （1646 年（寛永 23 年） — 1716 年（享保（きょうほう）1 年)) によって，始められ，彼等や，彼等に続く数学者たちによって，発展させられた.

現在高校の教科書に載っている微分や積分や大学で教える微分や積分のほとんどの部分に対応する結果は，この時代にすでに得られている.

厳密な定義を与える (3)

そこで用いられている概念の厳密な定義が与えられる前に天才的な数学者たちが理論をどんどん創りあげてしまう，ということが数学の歴史では何回も起っている．

このような場合，理論の本質にかかわる定義が明文化されないまま，一部の天才たちだけによって 共有され，研究される，という時期が続くことになる．

例えば，微分や積分の理論は，そこで中心的な役割をはたす 極限の概念が 厳密に定義されるより前に，イギリスの ニュートン (1642 年（寛永 19 年）— 1727 年（享保（きょうほう）12 年）) や，ドイツの ライプニッツ （1646 年（寛永 23 年） — 1716 年（享保（きょうほう）1 年））によって，始められ，彼等や，彼等に続く数学者たちによって，発展させられた．

現在高校の教科書に載っている微分や積分や大学で教える微分や積分のほとんどの部分に対応する結果は，この時代にすでに得られている．

厳密な定義を与える (3)

そこで用いられている概念の厳密な定義が与えられる前に天才的な数学者たちが理論をどんどん創りあげてしまう，ということが数学の歴史では何回も起っている．

このような場合，理論の本質にかかわる定義が明文化されないまま，一部の天才たちだけによって 共有され，研究される，という時期が続くことになる．

例えば，微分や積分の理論は，そこで中心的な役割をはたす 極限 の概念が 厳密に定義されるより前に，イギリスの ニュートン (1642 年（寛永 19 年）— 1727 年（享保（きょうほう）12 年)) や，ドイツの ライプニッツ （1646 年（寛永 23 年） — 1716 年（享保（きょうほう）1 年)）によって，始められ，彼等や，彼等に続く数学者たちによって，発展させられた．

現在高校の教科書に載っている微分や積分や大学で教える微分や積分のほとんどの部分に対応する結果は，この時代にすでに得られている．

厳密な定義を与える (3)

そこで用いられている概念の厳密な定義が与えられる前に天才的な数学者たちが理論をどんどん創りあげてしまう，ということが数学の歴史では何回も起っている．

このような場合，理論の本質にかかわる定義が明文化されないまま，一部の天才たちだけによって 共有され，研究される，という時期が続くことになる．

例えば，微分や積分の理論は，そこで中心的な役割をはたす 極限 の概念が 厳密に定義されるより前に，イギリスの ニュートン (1642 年（寛永 19 年）— 1727 年（享保（きょうほう）12 年)) や，ドイツの ライプニッツ （1646 年（寛永 23 年） — 1716 年（享保（きょうほう）1 年)) によって，始められ，彼等や，彼等に続く数学者たちによって，発展させられた．

現在高校の教科書に載っている微分や積分や大学で教える微分や積分のほとんどの部分に対応する結果は，この時代にすでに得られている．

高校や大学１年で習う極限の定義

$f(x)$ を実数から実数への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，（x の α への近づきかたによらず常に） $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを

$$\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$$

と書く．

高校や大学１年で習う極限の定義

$f(x)$ を実数から実数への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，（x の α への近づきかたによらず常に） $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき， $f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを

$$\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$$

と書く．