数 学 の 考 え 方

2009 年春学期@中部大学

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp
http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

第 6 回目の講義 (May 21, 2009 (01:46) 版)

5 月 20 日 （水曜日） 5-6 時限目 （13:35〜15:05） 934 教室
6 月 2 日 （火曜日） 9-10 時限目 （17:05〜18:35） 946 教室

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

高校や大学１年で習う極限の定義

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，(x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

上の定義の問題点:

- 「実数 x がどんどん値 α に近づく」は，空間的な運動のイメージにたよった直観的な表現になっている．
- 数学を使って動的（dynamical）な状況を表現することはできるが，数学自身の基礎は静的 (static) なものなので，「どんどん近づく」というような動的な表現は，基礎的な概念の定義にはなじまない．
- したがって，このような表現は理解の助けにはなるが厳密な定義とは言いがたい．

高校や大学 1 年で習う極限の定義

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，(x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

上の定義の問題点:

- 「実数 x がどんどん値 α に近づく」は，空間的な運動のイメージにたよった直観的な表現になっている．
- 数学を使って動的（dynamical）な状況を表現することはできるが，数学自身の基礎は静的 (static) なものなので，「どんどん近づく」というような動的な表現は，基礎的な概念の定義にはなじまない．
- したがって，このような表現は理解の助けにはなるが厳密な定義とは言いがたい．

高校や大学 1 年で習う極限の定義

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，(x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

上の定義の問題点:

- 「実数 x がどんどん値 α に近づく」は，空間的な運動のイメージにたよった直観的な表現になっている．
- 数学を使って動的（dynamical）な状況を表現することはできるが，数学自身の基礎は静的 (static) なものなので,「どんどん近づく」というような動的な表現は，基礎的な概念の定義にはなじまない．
- したがって，このような表現は理解の助けにはなるが厳密な定義とは言いがたい．

高校や大学1年で習う極限の定義

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，(x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

上の定義の問題点:

- 「実数 x がどんどん値 α に近づく」は，空間的な運動のイメージにたよった直観的な表現になっている．
- 数学を使って動的（dynamical）な状況を表現することはできるが，数学自身の基礎は静的 (static) なものなので，「どんどん近づく」というような動的な表現は，基礎的な概念の定義にはなじまない．
- したがって，このような表現は理解の助けにはなるが厳密な定義とは言いがたい．

高校や大学１年で習う極限の定義

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，(x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

上の定義の問題点:

- 「実数 x がどんどん値 α に近づく」は，空間的な運動のイメージにたよった直観的な表現になっている．
- 数学を使って動的（dynamical）な状況を表現することはできるが，数学自身の基礎は静的 (static) なものなので，「どんどん近づく」というような動的な表現は，基礎的な概念の定義にはなじまない．
- したがって，このような表現は理解の助けにはなるが厳密な定義とは言いがたい．

厳密な定義を与える — (続)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，(x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x\to\alpha} f(x)$ と書く．

歴史的背景:

- 微分法や積分法がニュートンやライプニッツによって 17 世紀後半（江戸時代初期）に確立されてから，19 世紀前半（江戸時代末期）まで 200 年近くの間，極限の定義は上のような直観的な，しかし，厳密でないものか，あるいはライプニッツによる（当時はその根拠の正当づけのできなかった）無限小の概念が用いられていた．
- 日本の大学では，今日でも，18 世紀以前の微分や積分の扱いに追従する教え方がされていることが多い．
- 中部大学の工学部の微分積分学の教科書は，19 世紀的な扱いと 18 世紀以前の扱いの折衷といった書き方になっている．

厳密な定義を与える — (続)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，(x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

歴史的背景:

- 微分法や積分法がニュートンやライプニッツによって 17 世紀後半（江戸時代初期）に確立されてから，19 世紀前半（江戸時代末期）まで 200 年近くの間，極限の定義は上のような直観的な，しかし，厳密でないものか，あるいはライプニッツによる（当時はその根拠の正当づけのできなかった）無限小の概念が用いられていた．
- 日本の大学では，今日でも，18 世紀以前の微分や積分の扱いに追従する教え方がされていることが多い．
- 中部大学の工学部の微分積分学の教科書は，19 世紀的な扱いと 18 世紀以前の扱いの折衷といった書き方になっている．

厳密な定義を与える — (続)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，(x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

歴史的背景:

- 微分法や積分法が**ニュートン**や**ライプニッツ**によって 17 世紀後半（江戸時代初期）に確立されてから，19 世紀前半（江戸時代末期）まで 200 年近くの間，極限の定義は上のような直観的な，しかし，厳密でないものか，あるいはライプニッツによる（当時はその根拠の正当づけのできなかった）無限小の概念が用いられていた．
- 日本の大学では，今日でも，18 世紀以前の微分や積分の扱いに追従する教え方がされていることが多い．
- 中部大学の工学部の微分積分学の教科書は，19 世紀的な扱いと 18 世紀以前の扱いの折衷といった書き方になっている．

厳密な定義を与える — (続)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，(x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

歴史的背景:

- 微分法や積分法が**ニュートン**や**ライプニッツ**によって 17 世紀後半（江戸時代初期）に確立されてから，19 世紀前半（江戸時代末期）まで 200 年近くの間，極限の定義は上のような直観的な，しかし，厳密でないものか，あるいはライプニッツによる（当時はその根拠の正当づけのできなかった）無限小の概念が用いられていた．
- 日本の大学では，今日でも，18 世紀以前の微分や積分の扱いに追従する教え方がされていることが多い．
- 中部大学の工学部の微分積分学の教科書は，19 世紀的な扱いと 18 世紀以前の扱いの折衷といった書き方になっている．

厳密な定義を与える — (続)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，(x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

歴史的背景:

- 微分法や積分法がニュートンやライプニッツによって 17 世紀後半（江戸時代初期）に確立されてから，19 世紀前半（江戸時代末期）まで 200 年近くの間，極限の定義は上のような直観的な，しかし，厳密でないものか，あるいはライプニッツによる（当時はその根拠の正当づけのできなかった）無限小の概念が用いられていた．
- 日本の大学では，今日でも，18 世紀以前の微分や積分の扱いに追従する教え方がされていることが多い．
- 中部大学の工学部の微分積分学の教科書は，19 世紀的な扱いと 18 世紀以前の扱いの折衷といった書き方になっている．

厳密な定義を与える — (続)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき, (x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

歴史的背景（その 2）：

- 実は，現代的な関数の概念が確立されるのも 19 世紀後半にである．しかも，関数の定義が本当に厳密化されて,「すべての関数に対して … が成り立つ」とか「… という性質を満たす関数が存在する」というような数学的な言い回しが問題なく扱えるようになったのは，20 世紀になってからのことである．
- 極限の定義を含む微分積分の厳密な展開は，コーシー(1789 年（寛政 1 年）– 1857 年（安政 4 年）), ヴァイヤシュトラス(1815 年（文化 12 年）– 1897（明治 30 年）), デデキント (1831 年（天保 2 年）– 1916 年（大正 5 年）) などにより整備された．

厳密な定義を与える — (続)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする. 実数 x がどんどん値 α に近づくとき, (x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき, $f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である, といい, このことを $\beta = \lim_{x\to\alpha} f(x)$ と書く.

歴史的背景（その 2）:

- 実は, 現代的な関数の概念が確立されるのも 19 世紀後半にである. しかも, 関数の定義が本当に厳密化されて,「すべての関数に対して … が成り立つ」とか 「… という性質を満たす関数が存在する」というような数学的な言い回しが問題なく扱えるようになったのは, 20 世紀になってからのことである.
- 極限の定義を含む微分積分の厳密な展開は, コーシー(1789 年（寛政 1 年）– 1857 年（安政 4 年）), ヴァイヤシュトラス(1815 年（文化 12 年）– 1897（明治 30 年）), デデキント (1831 年（天保 2 年）– 1916 年（大正 5 年）) などにより整備された.

厳密な定義を与える — (続)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，(x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x\to\alpha} f(x)$ と書く．

歴史的背景（その 2）：

- 実は，現代的な関数の概念が確立されるのも 19 世紀後半にである．しかも，関数の定義が本当に厳密化されて，「すべての関数に対して ⋯ が成り立つ」とか 「⋯ という性質を満たす関数が存在する」というような数学的な言い回しが問題なく扱えるようになったのは，20 世紀になってからのことである．
- 極限の定義を含む微分積分の厳密な展開は，コーシー(1789 年（寛政 1 年）– 1857 年（安政 4 年）)，ヴァイヤシュトラス(1815 年（文化 12 年）– 1897（明治 30 年）)，デデキント (1831 年（天保 2 年）– 1916 年（大正 5 年）) などにより整備された．

厳密な定義を与える — (続)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，(x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x\to\alpha} f(x)$ と書く．

歴史的背景（その 2）：

- 実は，現代的な関数の概念が確立されるのも 19 世紀後半にである．しかも，関数の定義が本当に厳密化されて,「すべての関数に対して … が成り立つ」とか「… という性質を満たす関数が存在する」というような数学的な言い回しが問題なく扱えるようになったのは，20 世紀になってからのことである．
- 極限の定義を含む微分積分の厳密な展開は，コーシー(1789 年（寛政 1 年）– 1857 年（安政 4 年））, ヴァイヤシュトラス(1815 年（文化 12 年）– 1897（明治 30 年））, デデキント (1831 年（天保 2 年）– 1916 年（大正 5 年））などにより整備された．

ε-δ 論法

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする． 実数 x がどんどん値 α に近づくとき，(x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき， $f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である， といい， このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

ε-δ **論法** と呼ばれる言い回しを使うと， 上の直観的な連続の "定義" は， 厳密な数学的な定義に翻訳できる:

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする． α, β を実数として，

すべての実数 $\varepsilon > 0$ に対して， 実数 $\delta > 0$ を選んで，

- すべての実数 x に対し， $0 < |x - \alpha| < \delta$ なら $|f(x) - \beta| < \varepsilon$

が成り立つようにできる

とき， $f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である， といい， このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

ε-δ 論法

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，(x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x\to\alpha} f(x)$ と書く．

ε-δ **論法** と呼ばれる言い回しを使うと，上の直観的な連続の "定義" は，厳密な数学的な定義に翻訳できる:

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．α, β を実数として，

すべての実数 $\varepsilon > 0$ に対して，実数 $\delta > 0$ を選んで，

- すべての実数 x に対し，$0 < |x - \alpha| < \delta$ なら $|f(x) - \beta| < \varepsilon$

が成り立つようにできる

とき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x\to\alpha} f(x)$ と書く．

ε-δ 論法

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．実数 x がどんどん値 α に近づくとき，(x の α への近づきかたによらず常に) $f(x)$ の値がどんどん β に近づくとき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

ε-δ **論法** と呼ばれる言い回しを使うと，上の直観的な連続の "定義" は，厳密な数学的な定義に翻訳できる:

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．α, β を実数として，

すべての実数 $\varepsilon > 0$ に対して，実数 $\delta > 0$ を選んで，

- すべての実数 x に対し，$0 < |x - \alpha| < \delta$ なら $|f(x) - \beta| < \varepsilon$

が成り立つようにできる

とき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

ε-δ 論法 (2)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．α, β を実数として，

すべての実数 $\varepsilon > 0$ に対して，実数 $\delta > 0$ を選んで，

- すべての実数 x に対し，$0 < |x - \alpha| < \delta$ なら $|f(x) - \beta| < \varepsilon$

が成り立つようにできる

とき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

注意:

- $|x - \alpha|$ は（直観的には）x と α の間の「距離」である．同様に $|f(x) - \beta|$ は $f(x)$ と β の間の距離である．
- ε と δ は，それぞれギリシャ文字「イプシロン」と「デルタ」である．
- ε と δ という文字のチョイスは，それぞれ，error（誤差 – ラテン語では erratum）と distance（距離 – ラテン語では distantia）の語呂あわせからきている．

ε-δ 論法 (2)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．α, β を実数として，

すべての実数 $\varepsilon > 0$ に対して，実数 $\delta > 0$ を選んで，

- すべての実数 x に対し，$0 < |x - \alpha| < \delta$ なら $|f(x) - \beta| < \varepsilon$

が成り立つようにできる

とき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

注意:

- $|x - \alpha|$ は（直観的には）x と α の間の「距離」である．同様に $|f(x) - \beta|$ は $f(x)$ と β の間の距離である．
- ε と δ は，それぞれギリシャ文字「イプシロン」と「デルタ」である．
- ε と δ という文字のチョイスは，それぞれ，error（誤差 – ラテン語では erratum）と distance（距離 – ラテン語では distantia）の語呂あわせからきている．

ε-δ 論法 (2)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする． α, β を実数として,

すべての実数 $\varepsilon > 0$ に対して，実数 $\delta > 0$ を選んで,

- すべての実数 x に対し, $0 < |x - \alpha| < \delta$ なら $|f(x) - \beta| < \varepsilon$

が成り立つようにできる

とき, $f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

注意:

- $|x - \alpha|$ は（直観的には） x と α の間の「距離」である．同様に $|f(x) - \beta|$ は $f(x)$ と β の間の距離である．
- ε と δ は，それぞれギリシャ文字「イプシロン」と「デルタ」である．
- ε と δ という文字のチョイスは，それぞれ，error（誤差 – ラテン語では erratum）と distance（距離 – ラテン語では distantia）の語呂あわせからきている．

ε-δ 論法 (2)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．α, β を実数として，

すべての実数 $\varepsilon > 0$ に対して，実数 $\delta > 0$ を選んで，

- すべての実数 x に対し，$0 < |x - \alpha| < \delta$ なら $|f(x) - \beta| < \varepsilon$

が成り立つようにできる

とき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

注意:

- $|x - \alpha|$ は（直観的には）x と α の間の「距離」である．同様に $|f(x) - \beta|$ は $f(x)$ と β の間の距離である．
- ε と δ は，それぞれギリシャ文字「イプシロン」と「デルタ」である．
- ε と δ という文字のチョイスは，それぞれ，error（誤差 – ラテン語では erratum）と distance（距離 – ラテン語では distantia）の語呂あわせからきている．

ε-δ 論法 (2)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．α, β を実数として，

すべての実数 $\varepsilon > 0$ に対して，実数 $\delta > 0$ を選んで，

- すべての実数 x に対し，$0 < |x - \alpha| < \delta$ なら $|f(x) - \beta| < \varepsilon$ が成り立つようにできる

とき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

注意:

- $|x - \alpha|$ は（直観的には）x と α の間の「距離」である．同様に $|f(x) - \beta|$ は $f(x)$ と β の間の距離である．
- ε と δ は，それぞれギリシャ文字「イプシロン」と「デルタ」である．
- ε と δ という文字のチョイスは，それぞれ，error（誤差 – ラテン語では erratum）と distance（距離 – ラテン語では distantia）の語呂あわせからきている．

ε-δ 論法 (3)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．α, β を実数として，

すべての実数 $\varepsilon > 0$ に対して，実数 $\delta > 0$ を選んで，

- すべての実数 x に対し，$0 < |x - \alpha| < \delta$ なら $|f(x) - \beta| < \varepsilon$ が成り立つようにできる

とき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

上の極限の定義は，前ページの注意を頭におくと，

> どのような誤差範囲 $\varepsilon > 0$ が与えられても，距離 $\delta > 0$ を十分に小さくとれば，α からの距離が δ 未満であるような x については，$f(x)$ の値の β からの誤差を ε 未満に抑えることができる．

と読み下すことができる．

ε-δ 論法 (3)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．α, β を実数として，

すべての実数 $\varepsilon > 0$ に対して，実数 $\delta > 0$ を選んで，

- すべての実数 x に対し，$0 < |x - \alpha| < \delta$ なら $|f(x) - \beta| < \varepsilon$

が成り立つようにできる

とき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

上の極限の定義は，前ページの注意を頭におくと，

どのような誤差範囲 $\varepsilon > 0$ が与えられても，距離 $\delta > 0$ を十分に小さくとれば，α からの距離が δ 未満であるような x については，$f(x)$ の値の β からの誤差を ε 未満に抑えることができる．

と読み下すことができる．

ε-δ 論法 (3)

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．α, β を実数として，

すべての実数 $\varepsilon > 0$ に対して，実数 $\delta > 0$ を選んで，

▶ すべての実数 x に対し，$0 < |x - \alpha| < \delta$ なら $|f(x) - \beta| < \varepsilon$ が成り立つようにできる

とき，$f(x)$ の値の α での**極限** (limit) は β である，といい，このことを $\beta = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ と書く．

上の極限の定義は，前ページの注意を頭におくと，

> どのような誤差範囲 $\varepsilon > 0$ が与えられても，距離 $\delta > 0$ を十分に小さくとれば，α からの距離が δ 未満であるような x については，$f(x)$ の値の β からの誤差を ε 未満に抑えることができる．

と読み下すことができる．

ε-δ 論法を用いた証明

ε-δ 論法により，例えば次のような定理の厳密な証明が可能になる:

定理 1

f と g を実数の全体から実数の全体への関数とする．α を実数として，f も g も α での極限を持つとする．たとえば $b_1 = \lim_{x\to\alpha} f(x)$, $b_2 = \lim_{x\to\alpha} g(x)$ とする．このとき，実数 x に $f(x)+g(x)$ を対応させる関数 $f(x)+g(x)$ も α で極限を持ち，

$$\lim_{x\to\alpha}(f(x)+g(x)) = b_1 + b_2 = \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x)$$

が成り立つ．

ε-δ 論法を用いた証明

ε-δ 論法により，例えば次のような定理の厳密な証明が可能になる:

定理 1

f と g を実数の全体から実数の全体への関数とする．α を実数として，f も g も α での極限を持つとする．たとえば $b_1 = \lim_{x \to \alpha} f(x)$, $b_2 = \lim_{x \to \alpha} g(x)$ とする．このとき，実数 x に $f(x) + g(x)$ を対応させる関数 $f(x) + g(x)$ も α で極限を持ち，

$$\lim_{x \to \alpha} (f(x) + g(x)) = b_1 + b_2 = \lim_{x \to \alpha} f(x) + \lim_{x \to \alpha} g(x)$$

が成り立つ．