数学の考え方

2009 年春学期@中部大学

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp
http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

第 7 回目の講義 (July 8, 2009 (11:47) 版)

5 月 27 日（水曜日）5-6 時限目（13:35〜15:05）934 教室
6 月 9 日（火曜日）9-10 時限目（17:05〜18:35）946 教室

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

ε - δ 論法 — 前回の復習

$f(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数とする．a, b を実数とする．$f(x)$ の値の a での**極限** (limit) が b である，とは，すべての実数 $\varepsilon > 0$ に対して，実数 $\delta > 0$ で次を満たすものがとれることである:

- すべての実数 x に対し，$0 < |x - a| < \delta$ なら $|f(x) - b| < \varepsilon$ が成り立つ

このとき，$b = \lim_{x \to a} f(x)$ と書く．

実数 c, d に対して $|d - c|$ （または $|c - d|$）は c と d の実数直線上の距離となる．上の極限の定義は，このことと（論理的には冗長となる）言葉を少し補うと

> どのような誤差範囲 $\varepsilon > 0$ が与えられても，$\delta > 0$ を十分に小さくとれば，a からの距離が δ 未満であるような，すべての x について，$f(x)$ の値の b からの誤差を ε 未満に抑えることができる．

と読み下すことができる．

ε - δ 論法を用いた証明

ε - δ 論法により，例えば次の定理の厳密な証明が可能になる:

定理 1 (工学部教科書:「微分積分学」p.5, (2) (i))

f と g を実数の全体から実数の全体への関数とする． a を実数として， f も g も a での極限を持つとする． たとえば $b_1 = \lim_{x \to a} f(x)$, $b_2 = \lim_{x \to a} g(x)$ とする． このとき， 実数 x に $f(x) + g(x)$ を対応させる関数 $f(x) + g(x)$ も a で極限を持ち，

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = b_1 + b_2 = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

が成り立つ．

証明. 極限の（ε - δ 論法による）定義から，次を証明すればよいことがわかる:

($*$) すべての実数 $\varepsilon > 0$ に対し， 実数 $\delta > 0$ で次を満たすものがとれる: すべての実数 x に対し， $0 < |x - a| < \delta$ なら， $|(f(x) + g(x)) - (b_1 + b_2)| < \varepsilon$.

定理 1 の証明の続き

$\varepsilon > 0$ を一つとる．このとき，$b_1 = \lim_{x\to a} f(x)$, $b_2 = \lim_{x\to a} g(x)$ だから，$\delta_1, \delta_2 > 0$ で，

(1) すべての実数 x で，$0 < |x-a| < \delta_1$ なら $|f(x) - b_1| < \varepsilon/2$,

(2) すべての実数 x で，$0 < |x-a| < \delta_2$ なら $|g(x) - b_2| < \varepsilon/2$

となるものがとれる（ε でなく $\varepsilon/2$ を使っていることに注意）．
δ を δ_1 と δ_2 のうちの小さい方とする．$0 < |x-a| < \delta$ とすると，$0 < |x-a| < \delta_1$ と $0 < |x-a| < \delta_2$ の両方が成り立つから，(1) と (2) により，

$$\begin{aligned}|(f(x)+g(x)) - (b_1+b_2)| &= |(f(x)-b_1) + (g(x)-b_2)| \\ &\leq |f(x)-b_1| + |g(x)-b_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

となる．したがって前ページの (*) が成り立つことがわかり，

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = b_1 + b_2 = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

が示せた．　**q.e.d.**

ε - δ 論法を用いた証明 (2)

定理 2

$f(x)$, $g(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数として， a を実数として， $b = \lim_{x \to a} f(x)$, $c = \lim_{x \to b} g(x)$ とする． このとき，
$c = \lim_{x \to a} g(f(x))$ が成り立つ．

証明 $\varepsilon > 0$ を任意にとる． このとき， $c = \lim_{x \to b} g(x)$ から， $\delta_0 > 0$ で， すべての $0 < |x - b| < \delta_0$ となる実数 x に対し，
$|g(x) - c| < \varepsilon$ となるものが存在する．

ここで δ_0 を $b = \lim_{x \to a} f(x)$ の定義での ε だと思うと， $\delta > 0$ が存在して， $0 < |x - a| < \delta$ となる実数 x に対し， $|f(x) - b| < \delta_0$ が常に成り立つ．

このとき， すべての $0 < |x - a| < \delta$ となる実数 x に対しに対し，
$|g(f(x)) - c| < \varepsilon$ である． **q.e.d.**

ε - δ 論法の演習問題

次の主張を ε - δ 論法を用いて証明してください.
（(自由研究) 課題）

$f(x)$, $g(x)$ を実数の全体から実数の全体への関数として， a を実数として， $b_1 = \lim_{x \to a} f(x)$, $b_2 = \lim_{x \to a} g(x)$ とするとき， 次を証明してください.

(1) $\lim_{x \to a} kf(x) = kb_1 = k \lim_{x \to a} f(x)$ （ただし k は任意の定数）

(2) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = b_1 b_2 = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$

(3) $b_2 = \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ なら， $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

上の (1), (2), (3) はそれぞれ， 中部大学工学部の教科書「微分積分学」の p.5, (2)(ii), (2)(iii), (2)(iv) です.

(2) と (3) の証明には， ちょっとした工夫が必要となり， そんなに簡単ではありません.

（自由研究）課題

- $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ という極限を考えることがあるが，これを，ε-δ 論法を用いて定式化するにはどうしたらようだろうか?
- 数列 a_n, $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を ε-δ 論法を用いて定式化するにはどうしたらようだろうか?

1.4 議論の出発点となる仮定が何かを明確にする

- 議論（証明）を始めるとき，何を前提として仮定していいかがはっきりしないと，議論がどうどうめぐりになってしまいがちである．
  数学では，それをさけるために，前提として仮定する知識が何であるかをまずはっきりさせてから，議論をはじめる，というスタイルの論法をとることが多い．
- このことは，科学の他の分野でも同様であるが，他の科学の分野では，いつでも可能というわけではない．
- 数学でも新しい理論を作ってゆく暗中模索過程では，循環論法に近い議論がなされることもある．
  しかし，できあがった数学理論を整理すると，前提として仮定されている知識が何であるかは，常に，明示されている，あるいは必要なら明示できるものとなっている．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

a, b を実数として $a > 0$ とするとき, a の b 乗 a^b が考えられる.
a, b から a^b を導く, という演算は, 次の基本性質により
特徴付けられている:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し,
$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し, 実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である. また, すべての実数 b に対し, $x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である.

「特徴付けられている」(characterized) ということの補足説明

a, b から a^b を導く，という演算は次の基本性質により特徴付けられている:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

とは，

- 演算 $(a, b) \mapsto a^b$ は上の (0)〜(2) を満たし，
- 任意の演算 $(a, b) \mapsto \varphi(a, b)$ が上の (0)〜(2) に対応する:

(0)' すべての実数 $a > 0$ に対し $\varphi(a, 1) = a$;

(1)' すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$\varphi(a, b + c) = \varphi(a, b) \cdot \varphi(a, c)$ が成り立つ;

(2)' すべての実数 $a > 0$ に対し，関数 $x \mapsto \varphi(a, x)$ は連続，

を満たすなら，$\varphi(a, b) = a^b$ がすべての $a > 0$ と b に対して成り立つ

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

たとえば，次のような a^b に関する次の性質は，すべて上の (0)〜(2) から導出できる:

- すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ 回}}$
- すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^0 = 1$
- すべての実数 x に対して $1^x = 1$
- すべての実数 x に対して，$a^x > 0$
- すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

等々 $\cdots$