数学の考え方

2009年春学期@中部大学

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp

http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

第8回目の講義 (June 30, 2009 (17:07) 拡張版)

6月　3日（水曜日）5-6 時限目（13:35～15:05）934教室
6月24日（水曜日）5-6 時限目（13:35～15:05）934教室
6月23日（火曜日）9-10 時限目（17:05～18:35）946教室

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

a, b を実数として $a > 0$ とするとき，a の b 乗 a^b が考えられる．a, b から a^b を導く，という演算は，次の基本性質により特徴付けられる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

a の b 乗 a^b に関する性質は，すべて，これらの性質 (0) ～ (2) から出発して示すことができる．また，そうすることにより，a の b 乗 a^b に関する性質の証明は見通しのよいものにできる．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

a, b を実数として $a > 0$ とするとき，a の b 乗 a^b が考えられる．a, b から a^b を導く，という演算は，次の基本性質により特徴付けられる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

a の b 乗 a^b に関する性質は，すべて，これらの性質 (0) 〜 (2) から出発して示すことができる．また，そうすることにより，a の b 乗 a^b に関する性質の証明は見通しのよいものにできる．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

a, b を実数として $a > 0$ とするとき，a の b 乗 a^b が考えられる．a, b から a^b を導く，という演算は，次の基本性質により特徴付けられる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

a の b 乗 a^b に関する性質は，すべて，これらの性質 (0) 〜 (2) から出発して示すことができる．また，そうすることにより，a の b 乗 a^b に関する性質の証明は見通しのよいものにできる．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

a, b を実数として $a > 0$ とするとき，a の b 乗 a^b が考えられる．a, b から a^b を導く，という演算は，次の基本性質により特徴付けられる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

a の b 乗 a^b に関する性質は，すべて，これらの性質 (0) ～ (2) から出発して示すことができる．また，そうすることにより，a の b 乗 a^b に関する性質の証明は見通しのよいものにできる．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

a, b を実数として $a > 0$ とするとき，a の b 乗 a^b が考えられる．a, b から a^b を導く，という演算は，次の基本性質により特徴付けられる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

a の b 乗 a^b に関する性質は，すべて，これらの性質 (0) ∼ (2) から出発して示すことができる．また，そうすることにより，a の b 乗 a^b に関する性質の証明は見通しのよいものにできる．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

a, b を実数として $a > 0$ とするとき，a の b 乗 a^b が考えられる．a, b から a^b を導く，という演算は，次の基本性質により特徴付けられる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

a の b 乗 a^b に関する性質は，すべて，これらの性質 (0) ∼ (2) から出発して示すことができる．また，そうすることにより，a の b 乗 a^b に関する性質の証明は見通しのよいものにできる．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

a, b を実数として $a > 0$ とするとき，a の b 乗 a^b が考えられる．a, b から a^b を導く，という演算は，次の基本性質により特徴付けられる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

a の b 乗 a^b に関する性質は，すべて，これらの性質 (0) ∼ (2) から出発して示すことができる．また，そうすることにより，a の b 乗 a^b に関する性質の証明は見通しのよいものにできる．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

a, b を実数として $a > 0$ とするとき，a の b 乗 a^b が考えられる．a, b から a^b を導く，という演算は，次の基本性質により特徴付けられる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

a の b 乗 a^b に関する性質は，すべて，これらの性質 (0) ～ (2) から出発して示すことができる．また，そうすることにより，a の b 乗 a^b に関する性質の証明は見通しのよいものにできる．

「特徴付けられる」(characterized) ということの補足説明

a, b から a^b を導く，という演算は次の基本性質により特徴付けられる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

とは，(α) 演算 $(a, b) \mapsto a^b$ は上の (0)〜(2) を満たし，
(β) 任意の演算 $(a, b) \mapsto \varphi(a, b)$ が上の (0)〜(2) に対応する:

(0)' すべての実数 $a > 0$ に対し $\varphi(a, 1) = a$;

(1)' すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$\varphi(a, b + c) = \varphi(a, b) \cdot \varphi(a, c)$ が成り立つ;

(2)' すべての実数 $a > 0$ に対し，関数 $x \mapsto \varphi(a, x)$ は連続，また，任意の実数 b に対し，関数 $x \mapsto \varphi(x, b)$ （ただし $x > 0$）も連続

を満たすなら，$\varphi(a, b) = a^b$ がすべての $a > 0$ と b に対して成り立つ

ということである．

「特徴付けられる」(characterized) ということの補足説明

a, b から a^b を導く，という演算は次の基本性質により 特徴付けられる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

とは，(α) 演算 $(a, b) \mapsto a^b$ は上の (0)〜(2) を満たし，
(β) 任意の演算 $(a, b) \mapsto \varphi(a, b)$ が上の (0)〜(2) に対応する:

(0)' すべての実数 $a > 0$ に対し $\varphi(a, 1) = a$;

(1)' すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$\varphi(a, b + c) = \varphi(a, b) \cdot \varphi(a, c)$ が成り立つ;

(2)' すべての実数 $a > 0$ に対し，関数 $x \mapsto \varphi(a, x)$ は連続，また，任意の実数 b に対し，関数 $x \mapsto \varphi(x, b)$ （ただし $x > 0$）も連続

を満たすなら，$\varphi(a, b) = a^b$ がすべての $a > 0$ と b に対して成り立つ

ということである．

「特徴付けられる」(characterized) ということの補足説明

a, b から a^b を導く，という演算は次の基本性質により 特徴付けられる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

とは，(α) 演算 $(a, b) \mapsto a^b$ は上の (0)〜(2) を満たし，

(β) 任意の演算 $(a, b) \mapsto \varphi(a, b)$ が上の (0)〜(2) に対応する:

(0)' すべての実数 $a > 0$ に対し $\varphi(a, 1) = a$;

(1)' すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$\varphi(a, b + c) = \varphi(a, b) \cdot \varphi(a, c)$ が成り立つ;

(2)' すべての実数 $a > 0$ に対し，関数 $x \mapsto \varphi(a, x)$ は連続，また，任意の実数 b に対し，関数 $x \mapsto \varphi(x, b)$ （ただし $x > 0$）も連続

を満たすなら，$\varphi(a, b) = a^b$ がすべての $a > 0$ と b に対して成り立つ

ということである．

「特徴付けられる」(characterized) ということの補足説明

a, b から a^b を導く，という演算は次の基本性質により 特徴付けられる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

とは，(α) 演算 $(a, b) \mapsto a^b$ は上の (0)〜(2) を満たし，
(β) 任意の演算 $(a, b) \mapsto \varphi(a, b)$ が上の (0)〜(2) に対応する:

(0)' すべての実数 $a > 0$ に対し $\varphi(a, 1) = a$;

(1)' すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$\varphi(a, b + c) = \varphi(a, b) \cdot \varphi(a, c)$ が成り立つ;

(2)' すべての実数 $a > 0$ に対し，関数 $x \mapsto \varphi(a, x)$ は連続，また，任意の実数 b に対し，関数 $x \mapsto \varphi(x, b)$ （ただし $x > 0$）も連続

を満たすなら，$\varphi(a, b) = a^b$ がすべての $a > 0$ と b に対して成り立つ

ということである．

「特徴付けられる」(characterized) ということの補足説明

a, b から a^b を導く，という演算は次の基本性質により特徴付けられる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

とは，(α) 演算 $(a, b) \mapsto a^b$ は上の (0)〜(2) を満たし，

(β) 任意の演算 $(a, b) \mapsto \varphi(a, b)$ が上の (0)〜(2) に対応する:

(0)' すべての実数 $a > 0$ に対し $\varphi(a, 1) = a$;

(1)' すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，
$\varphi(a, b + c) = \varphi(a, b) \cdot \varphi(a, c)$ が成り立つ;

(2)' すべての実数 $a > 0$ に対し，関数 $x \mapsto \varphi(a, x)$ は連続，また，任意の実数 b に対し，関数 $x \mapsto \varphi(x, b)$ （ただし $x > 0$）も連続

を満たすなら，$\varphi(a, b) = a^b$ がすべての $a > 0$ と b に対して成り立つ

ということである．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

実数の全体から実数の全体への関数 $f(x)$ が **連続** (continuous) であるとは，すべての実数 a に対し，

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つこと．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

実数の全体から実数の全体への関数 $f(x)$ が 連続 (continuous) であるとは，すべての実数 a に対し，

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つこと．

関数の値の極限に関する補足

- 関数 $f(x)$ の値の，実数 a での極限は存在しないこともある．
たとえば，$f(x) = \sin(1/x)$ とするとき，$\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しない．

関数の値の極限の存在しないような，もう一つの例:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ が有理数のとき} \\ 1, & x \text{ が無理数のとき} \end{cases}$$

とすると，どんな実数 a に対しても $\lim_{x \to a} f(x)$ は存在しない．

- 関数 $f(x)$ の値の，実数 a での極限は存在しても $f(a)$ と異なることがありえる．
たとえば，

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \text{ のとき} \\ 1, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とするとき，$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ だが，$f(1) \neq 1$ である．

関数の値の極限に関する補足

- 関数 $f(x)$ の値の，実数 a での極限は存在しないこともある．

たとえば，$f(x) = \sin(1/x)$ とするとき，$\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しない．

関数の値の極限の存在しないような，もう一つの例:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ が有理数のとき} \\ 1, & x \text{ が無理数のとき} \end{cases}$$

とすると，どんな実数 a に対しても $\lim_{x \to a} f(x)$ は存在しない．

- 関数 $f(x)$ の値の，実数 a での極限は存在しても $f(a)$ と異なることがありえる．

たとえば，

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \text{ のとき} \\ 1, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とするとき，$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ だが，$f(1) \neq 1$ である．

関数の値の極限に関する補足

- 関数 $f(x)$ の値の，実数 a での極限は存在しないこともある．
たとえば，$f(x) = \sin(1/x)$ とするとき，$\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しない．

関数の値の極限の存在しないような，もう一つの例:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ が有理数のとき} \\ 1, & x \text{ が無理数のとき} \end{cases}$$

とすると，どんな実数 a に対しても $\lim_{x \to a} f(x)$ は存在しない．

- 関数 $f(x)$ の値の，実数 a での極限は存在しても $f(a)$ と異なることがありえる．
たとえば，

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \text{ のとき} \\ 1, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とするとき，$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ だが，$f(1) \neq 1$ である．

関数の値の極限に関する補足

- 関数 $f(x)$ の値の，実数 a での極限は存在しないこともある．
たとえば，$f(x) = \sin(1/x)$ とするとき，$\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しない．

関数の値の極限の存在しないような，もう一つの例:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ が有理数のとき} \\ 1, & x \text{ が無理数のとき} \end{cases}$$

とすると，どんな実数 a に対しても $\lim_{x \to a} f(x)$ は存在しない．

- 関数 $f(x)$ の値の，実数 a での極限は存在しても $f(a)$ と異なることがありえる．
たとえば，

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \text{ のとき} \\ 1, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とするとき，$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ だが，$f(1) \neq 1$ である．

関数の値の極限に関する補足

- 関数 $f(x)$ の値の，実数 a での極限は存在しないこともある．
たとえば，$f(x)=\sin(1/x)$ とするとき，$\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない．

関数の値の極限の存在しないような，もう一つの例:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \text{ が有理数のとき} \\ 1, & x \text{ が無理数のとき} \end{cases}$$

とすると，どんな実数 a に対しても $\lim_{x\to a} f(x)$ は存在しない．

- 関数 $f(x)$ の値の，実数 a での極限は存在しても $f(a)$ と異なることがありえる．
たとえば，

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=1 \text{ のとき} \\ 1, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とするとき，$\lim_{x\to 1} f(x)=1$ だが，$f(1)\neq 1$ である．

関数の値の極限に関する補足

- 関数 $f(x)$ の値の，実数 a での極限は存在しないこともある．
たとえば，$f(x)=\sin(1/x)$ とするとき，$\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない．

関数の値の極限の存在しないような，もう一つの例:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \text{ が有理数のとき} \\ 1, & x \text{ が無理数のとき} \end{cases}$$

とすると，どんな実数 a に対しても $\lim_{x\to a} f(x)$ は存在しない．

- 関数 $f(x)$ の値の，実数 a での極限は存在しても $f(a)$ と異なることがありえる．
たとえば，

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=1 \text{ のとき} \\ 1, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とするとき，$\lim_{x\to 1} f(x)=1$ だが，$f(1)\neq 1$ である．

（自由研究）課題

前ページの 1 番目と 3 番目の例のグラフを描いてください（2 番目の例はグラフの図示が不可能!）．1 番目，2 番目，3 番目の例を ε-δ 論法による関数の値の極限の定義に基づいて説明してください.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

以下の a^b の性質は，すべて，基本性質 (0)〜(2) から導出できる:

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ 個}}$

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(C) $a^0 = 1$

(D) $a > 1$, $x < y$ なら $a^x < a^y$

(E) すべての実数 x に対して，$a^x > 0$

(F) すべての実数 x と自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

以下の a^b の性質は，すべて，基本性質 (0)〜(2) から導出できる:

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\ 個}$

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(C) $a^0 = 1$

(D) $a > 1$, $x < y$ なら $a^x < a^y$

(E) すべての実数 x に対して，$a^x > 0$

(F) すべての実数 x と自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

以下の a^b の性質は，すべて，基本性質 (0)〜(2) から導出できる:

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{ 個}}$

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(C) $a^0 = 1$

(D) $a > 1$, $x < y$ なら $a^x < a^y$

(E) すべての実数 x に対して，$a^x > 0$

(F) すべての実数 x と自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

以下の a^b の性質は，すべて，基本性質 (0)〜(2) から導出できる:

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ 個}}$

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(C) $a^0 = 1$

(D) $a > 1$, $x < y$ なら $a^x < a^y$

(E) すべての実数 x に対して，$a^x > 0$

(F) すべての実数 x と自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

以下の a^b の性質は，すべて，基本性質 (0)〜(2) から導出できる:

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\ 個}$

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(C) $a^0 = 1$

(D) $a > 1$, $x < y$ なら $a^x < a^y$

(E) すべての実数 x に対して，$a^x > 0$

(F) すべての実数 x と自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

以下の a^b の性質は，すべて，基本性質 (0)〜(2) から導出できる:

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{ 個}}$

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(C) $a^0 = 1$

(D) $a > 1,\ x < y$ なら $a^x < a^y$

(E) すべての実数 x に対して，$a^x > 0$

(F) すべての実数 x と自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

(H) すべての $a > 0$ と実数 $x,\ y$ に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

以下の a^b の性質は，すべて，基本性質 (0)〜(2) から導出できる:

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{ 個}}$

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(C) $a^0 = 1$

(D) $a > 1$, $x < y$ なら $a^x < a^y$

(E) すべての実数 x に対して，$a^x > 0$

(F) すべての実数 x と自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

以下の a^b の性質は，すべて，基本性質 (0)〜(2) から導出できる:

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{ 個}}$

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(C) $a^0 = 1$

(D) $a > 1,\ x < y$ なら $a^x < a^y$

(E) すべての実数 x に対して，$a^x > 0$

(F) すべての実数 x と自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

(H) すべての $a > 0$ と実数 $x,\ y$ に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

以下の a^b の性質は，すべて，基本性質 (0)〜(2) から導出できる:

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{ 個}}$

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(C) $a^0 = 1$

(D) $a > 1$, $x < y$ なら $a^x < a^y$

(E) すべての実数 x に対して，$a^x > 0$

(F) すべての実数 x と自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

以下の a^b の性質は，すべて，基本性質 (0)〜(2) から導出できる:

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{ 個}}$

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(C) $a^0 = 1$

(D) $a > 1,\ x < y$ なら $a^x < a^y$

(E) すべての実数 x に対して，$a^x > 0$

(F) すべての実数 x と自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

(H) すべての $a > 0$ と実数 $x,\ y$ に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

以下の a^b の性質は，すべて，基本性質 (0)〜(2) から導出できる:

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{ 個}}$

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(C) $a^0 = 1$

(D) $a > 1$, $x < y$ なら $a^x < a^y$

(E) すべての実数 x に対して，$a^x > 0$

(F) すべての実数 x と自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\ 個}$

証明． $a^n = a^{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n\ 個}} = \underbrace{a^1 \cdot a^1 \cdot \cdots \cdot a^1}_{n\ 個} = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\ 個}$

$\uparrow$ (1) $\times$ $(n-1)$ $\qquad$ $\uparrow$ (0) $\times$ n

q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ 個}}$

証明．
$$a^n = a^{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n \text{ 個}}} = \underbrace{a^1 \cdot a^1 \cdot \cdots \cdot a^1}_{\substack{n \text{ 個} \\ \uparrow\ (1) \times (n-1)}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{\substack{n \text{ 個} \\ \uparrow\ (0) \times n}}$$

q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{ 個}}$

証明. $a^n = a^{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n\text{ 個}}} = \underbrace{a^1 \cdot a^1 \cdot \cdots \cdot a^1}_{n\text{ 個}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{ 個}}$

$\uparrow$ (1) $\times$ $(n-1)$ $\quad$ $\uparrow$ (0) $\times$ n

q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し, $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し, 実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である. また, すべての実数 b に対し, $x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である.

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{ 個}}$

証明. $a^n = a^{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n\text{ 個}}} = \underbrace{a^1 \cdot a^1 \cdot \cdots \cdot a^1}_{\substack{n\text{ 個} \\ \uparrow\ (1) \times (n-1)}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{\substack{n\text{ 個} \\ \uparrow\ (0) \times n}}$

q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

証明． $a = a^1 = a^{x+1-x} = a^x \cdot a^1 \cdot a^{-x} = a^x \cdot a \cdot a^{-x}$ だから，

$\uparrow$ (0) $\qquad \uparrow$ (1) × 2 $\qquad \uparrow$ (0)

この両辺を $a \cdot a^x$ で割ると，$\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$ となる． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

証明． $\underset{\uparrow\ (0)}{a = a^1} = a^{x+1-x} \underset{\uparrow\ (1)\times 2}{=} a^x \cdot a^1 \cdot a^{-x} \underset{\uparrow\ (0)}{=} a^x \cdot a \cdot a^{-x}$ だから，

この両辺を $a \cdot a^x$ で割ると，$\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$ となる． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

証明. $a = a^1 = a^{x+1-x} = a^x \cdot a^1 \cdot a^{-x} = a^x \cdot a \cdot a^{-x}$ だから，

$\uparrow$ (0) $\quad \uparrow$ (1) × 2 $\quad \uparrow$ (0)

この両辺を $a \cdot a^x$ で割ると，$\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$ となる． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

証明. $\underset{\uparrow\ (0)}{a = a^1} = \underset{\uparrow\ (1)\times 2}{a^{x+1-x} = a^x \cdot a^1 \cdot a^{-x}} = \underset{\uparrow\ (0)}{a^x \cdot a \cdot a^{-x}}$ だから，

この両辺を $a \cdot a^x$ で割ると，$\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$ となる． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;
(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;
(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

証明. $a = a^1 = a^{x+1-x} = a^x \cdot a^1 \cdot a^{-x} = a^x \cdot a \cdot a^{-x}$ だから，

$$\underset{\uparrow\ (0)}{a = a^1} = \underset{\uparrow\ (1) \times 2}{a^{x+1-x} = a^x \cdot a^1 \cdot a^{-x}} = \underset{\uparrow\ (0)}{a^x \cdot a \cdot a^{-x}}$$

この両辺を $a \cdot a^x$ で割ると，$\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$ となる． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(C) $a^0 = 1$

証明．
$$a^0 = a^{1+(-1)} \underset{\uparrow\,(1)}{=} a^1 \cdot a^{-1} \underset{\uparrow\,(B)}{=} a^1 \cdot \frac{1}{a^1} = 1.$$

q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(C) $a^0 = 1$

証明． $a^0 = a^{1+(-1)} = a^1 \cdot a^{-1} = a^1 \cdot \dfrac{1}{a^1} = 1.$

$\uparrow$ (1) $\quad \uparrow$ (B)

q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(C) $a^0 = 1$

証明. $$a^0 = a^{1+(-1)} \underset{\uparrow\,(1)}{=} a^1 \cdot a^{-1} \underset{\uparrow\,(\mathrm{B})}{=} a^1 \cdot \frac{1}{a^1} = 1.$$

q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(C) $a^0 = 1$

証明． $$a^0 = a^{1+(-1)} \underset{\uparrow\ (1)}{=} a^1 \cdot a^{-1} \underset{\uparrow\ (\mathrm{B})}{=} a^1 \cdot \frac{1}{a^1} = 1.$$

q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(D') $a > 1$, $x < y$ なら $0 < a^x < a^y$

証明． $O = \{q : q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$ とする．(*) すべての実数 $x < y$ に対し，$x < q < y$ となる $q \in O$ がとれる ことが示せる（つまり O の要素は $\mathbb{R}$ の中に "ぎっしり" つまっている — このことを O は $\mathbb{R}$ の中で **稠密** (dense) であるという）．
まず，(D') の特別な場合である，次の主張を証明する:

補題 1. $q, r \in O$ で，$q < r$ なら，$0 < a^q < a^r$ が成り立つ．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し, $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し, 実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である. また, すべての実数 b に対し, $x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である.

(D') $a > 1$, $x < y$ なら $0 < a^x < a^y$

証明. $O = \{q : q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数$\}$ とする. (*) すべての実数 $x < y$ に対し, $x < q < y$ となる $q \in O$ がとれる ことが示せる (つまり O の要素は $\mathbb{R}$ の中に "ぎっしり" つまっている — このことを O は $\mathbb{R}$ の中で 稠密 (dense) であるという).

まず, (D') の特別な場合である, 次の主張を証明する:

補題 1. $q, r \in O$ で, $q < r$ なら, $0 < a^q < a^r$ が成り立つ.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(D') $a > 1$, $x < y$ なら $0 < a^x < a^y$

証明. $O = \{q : q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数$\}$ とする．(*) すべての実数 $x < y$ に対し，$x < q < y$ となる $q \in O$ がとれる ことが示せる（つまり O の要素は $\mathbb{R}$ の中に “ぎっしり” つまっている — このことを O は $\mathbb{R}$ の中で **稠密** (dense) であるという）．
まず，(D') の特別な場合である，次の主張を証明する:

補題 1. $q, r \in O$ で，$q < r$ なら，$0 < a^q < a^r$ が成り立つ．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(D') $a > 1$, $x < y$ なら $0 < a^x < a^y$

証明. $O = \{q : q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$ とする．(*) すべての実数 $x < y$ に対し，$x < q < y$ となる $q \in O$ がとれる ことが示せる（つまり O の要素は $\mathbb{R}$ の中に “ぎっしり” つまっている — このことを O は $\mathbb{R}$ の中で **稠密** (dense) であるという）．
まず，(D') の特別な場合である，次の主張を証明する:

補題 1. $q, r \in O$ で，$q < r$ なら，$0 < a^q < a^r$ が成り立つ．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(D') $a > 1$, $x < y$ なら $0 < a^x < a^y$

証明．　$O = \{q : q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$ とする．(*) すべての実数 $x < y$ に対し，$x < q < y$ となる $q \in O$ がとれる ことが示せる（つまり O の要素は $\mathbb{R}$ の中に “ぎっしり” つまっている — このことを O は $\mathbb{R}$ の中で 稠密 (dense) であるという）．
まず，(D') の特別な場合である，次の主張を証明する:

補題 1. $q, r \in O$ で，$q < r$ なら，$0 < a^q < a^r$ が成り立つ．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$O = \{q : q = \frac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

補題 1. $q, r \in O$ で，$q < r$ なら，$0 < a^q < a^r$ が成り立つ．

証明. q と r の分数表現を通分することで，ある奇数 n に対し $q = \frac{m}{n}$, $r = \frac{m'}{n}$ となっているとしてよい（奇数×奇数=奇数 に注意!）．
$q < r$ （かつ $n > 0$） により，$m < m'$ である．ここで，

$$(a^q)^n = (a^{\frac{m}{n}})^n = a^m > 0, \qquad (a^r)^n = (a^{\frac{m'}{n}})^n = a^{m'}.$$

このことと，$a > 1$ により，$0 < (a^q)^n < (a^r)^n$ である．よって，n が奇数により，$0 < a^q < a^r$ である． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a>0$ に対し $a^1=a$;

(1) すべての実数 $a>0$ と b,c に対し，$a^{b+c}=a^b\cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a>0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x>0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$O=\{q : q=\dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

補題 1. $q,r\in O$ で，$q<r$ なら，$0<a^q<a^r$ が成り立つ．

証明. q と r の分数表現を通分することで，ある奇数 n に対し $q=\dfrac{m}{n}$, $r=\dfrac{m'}{n}$ となっているとしてよい（奇数×奇数=奇数 に注意!）．$q<r$ （かつ $n>0$） により，$m<m'$ である．ここで，

$$(a^q)^n=(a^{\frac{m}{n}})^n=a^m>0,\qquad (a^r)^n=(a^{\frac{m'}{n}})^n=a^{m'}.$$

このことと，$a>1$ により，$0<(a^q)^n<(a^r)^n$ である．よって，n が奇数により，$0<a^q<a^r$ である． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$O = \{q : q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

補題 1. $q, r \in O$ で，$q < r$ なら，$0 < a^q < a^r$ が成り立つ．

証明. q と r の分数表現を通分することで，ある奇数 n に対し $q = \dfrac{m}{n}$, $r = \dfrac{m'}{n}$ となっているとしてよい（奇数×奇数=奇数 に注意!）．$q < r$（かつ $n > 0$）により，$m < m'$ である．ここで，

$$(a^q)^n = (a^{\frac{m}{n}})^n = a^m > 0, \qquad (a^r)^n = (a^{\frac{m'}{n}})^n = a^{m'}.$$

このことと，$a > 1$ により，$0 < (a^q)^n < (a^r)^n$ である．よって，n が奇数により，$0 < a^q < a^r$ である． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$O = \{q \,:\, q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

補題 1. $q, r \in O$ で，$q < r$ なら，$0 < a^q < a^r$ が成り立つ．

証明. q と r の分数表現を通分することで，ある奇数 n に対し $q = \dfrac{m}{n}$, $r = \dfrac{m'}{n}$ となっているとしてよい（奇数×奇数=奇数 に注意!）．$q < r$ （かつ $n > 0$） により，$m < m'$ である．ここで，

$$(a^q)^n = (a^{\frac{m}{n}})^n = a^m > 0, \qquad (a^r)^n = (a^{\frac{m'}{n}})^n = a^{m'}.$$

このことと，$a > 1$ により，$0 < (a^q)^n < (a^r)^n$ である．よって，n が奇数により，$0 < a^q < a^r$ である． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$O = \{q \,:\, q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

補題 1. $q, r \in O$ で，$q < r$ なら，$0 < a^q < a^r$ が成り立つ．

証明. q と r の分数表現を通分することで，ある奇数 n に対し $q = \dfrac{m}{n}$, $r = \dfrac{m'}{n}$ となっているとしてよい（奇数×奇数=奇数 に注意!）．$q < r$（かつ $n > 0$）により，$m < m'$ である．ここで，

$$(a^q)^n = (a^{\frac{m}{n}})^n = a^m > 0, \qquad (a^r)^n = (a^{\frac{m'}{n}})^n = a^{m'}.$$

このことと，$a > 1$ により，$0 < (a^q)^n < (a^r)^n$ である．よって，n が奇数により，$0 < a^q < a^r$ である． q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$O = \{q \,:\, q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

補題 1. $q, r \in O$ で，$q < r$ なら，$0 < a^q < a^r$ が成り立つ．

証明. q と r の分数表現を通分することで，ある奇数 n に対し $q = \dfrac{m}{n}$, $r = \dfrac{m'}{n}$ となっているとしてよい（奇数×奇数=奇数 に注意!）．$q < r$ （かつ $n > 0$） により，$m < m'$ である．ここで，

$$(a^q)^n = (a^{\frac{m}{n}})^n = a^m > 0, \qquad (a^r)^n = (a^{\frac{m'}{n}})^n = a^{m'}.$$

このことと，$a > 1$ により，$0 < (a^q)^n < (a^r)^n$ である．よって，n が奇数により，$0 < a^q < a^r$ である． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$O = \{q \, : \, q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

補題 1. $q, r \in O$ で，$q < r$ なら，$0 < a^q < a^r$ が成り立つ．

x, y, $x < y$ を任意の実数とする．このとき，(*) により，q, r, $s \in O$ で，$q < x < r < s < y$ となるものがとれる．ここで (2) と (*) を使うと，

$$a^x = \lim_{t \to x} a^t = \lim_{t \in O, q < t < r, t \to x} a^t, \quad a^y = \lim_{t \to y} a^t = \lim_{t \in O, s < t, t \to y} a^t$$

となることがわかる．したがって補題 1 から，

$0 < a^q \le a^x \le a^r < a^s \le a^y$ となり $0 < a^x < a^y$ がわかる． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$O = \{q \,:\, q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

補題 1. q, $r \in O$ で，$q < r$ なら，$0 < a^q < a^r$ が成り立つ．

x, y, $x < y$ を任意の実数とする．このとき，(*) により，q, r, $s \in O$ で，$q < x < r < s < y$ となるものがとれる．ここで (2) と (*) を使うと，

$$a^x = \lim_{t\to x} a^t = \lim_{t\in O, q<t<r, t\to x} a^t, \quad a^y = \lim_{t\to y} a^t = \lim_{t\in O, s<t, t\to y} a^t$$

となることがわかる．したがって補題 1 から，

$0 < a^q \le a^x \le a^r < a^s \le a^y$ となり $0 < a^x < a^y$ がわかる．**q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し, $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し, 実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である. また, すべての実数 b に対し, $x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である.

$O = \{q \,:\, q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

補題 1. q, $r \in O$ で, $q < r$ なら, $0 < a^q < a^r$ が成り立つ.

x, y, $x < y$ を任意の実数とする. このとき, (*) により, q, r, $s \in O$ で, $q < x < r < s < y$ となるものがとれる. ここで (2) と (*) を使うと,

$$a^x = \lim_{t\to x} a^t = \lim_{t\in O, q<t<r, t\to x} a^t, \quad a^y = \lim_{t\to y} a^t = \lim_{t\in O, s<t, t\to y} a^t$$

となることがわかる. したがって補題 1 から,

$0 < a^q \le a^x \le a^r < a^s \le a^y$ となり $0 < a^x < a^y$ がわかる. **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$O = \{q : q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

補題 1. $q, r \in O$ で，$q < r$ なら，$0 < a^q < a^r$ が成り立つ．

$x, y, x < y$ を任意の実数とする．このとき，(*) により，$q, r, s \in O$ で，$q < x < r < s < y$ となるものがとれる．ここで (2) と (*) を使うと，

$$a^x = \lim_{t \to x} a^t = \lim_{t \in O, q<t<r, t \to x} a^t, \quad a^y = \lim_{t \to y} a^t = \lim_{t \in O, s<t, t \to y} a^t$$

となることがわかる．したがって補題 1 から，

$0 < a^q \le a^x \le a^r < a^s \le a^y$ となり $0 < a^x < a^y$ がわかる． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$O = \{q \,:\, q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

(D') $a > 1$, $x < y$ なら $0 < a^x < a^y$

(D) $a > 1$, $x < y$ なら $a^x < a^y$;

(E) すべての $a > 0$ に対して $a^x > 0$

証明．(D) は (D') の一部だからよい．

(E): $a > 1$ なら，(D') の不等式の最初の部分により，よい．

$0 < a < 1$ なら，$b = \dfrac{1}{a}$ とすると，$b > 1$ だが，(B) により，

$a^x = b^{-x} > 0$．$a = 1$ のときには，後出の (G) によりよい．**q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$O = \{q \,:\, q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

(D') $a > 1, x < y$ なら $0 < a^x < a^y$

(D) $a > 1, x < y$ なら $a^x < a^y$;
(E) すべての $a > 0$ に対して $a^x > 0$

証明． (D) は (D') の一部だからよい．
(E): $a > 1$ なら，(D') の不等式の最初の部分により，よい．
$0 < a < 1$ なら，$b = \dfrac{1}{a}$ とすると，$b > 1$ だが，(B) により，
$a^x = b^{-x} > 0$．$a = 1$ のときには，後出の (G) によりよい． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a>0$ に対し $a^1=a$;

(1) すべての実数 $a>0$ と b, c に対し，$a^{b+c}=a^b\cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a>0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x>0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$O=\{q\ :\ q=\dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

(D') $a>1$, $x<y$ なら $0<a^x<a^y$

(D) $a>1$, $x<y$ なら $a^x<a^y$;
(E) すべての $a>0$ に対して $a^x>0$

証明. (D) は (D') の一部だからよい．

(E): $a>1$ なら，(D') の不等式の最初の部分により，よい．

$0<a<1$ なら，$b=\dfrac{1}{a}$ とすると，$b>1$ だが，(B) により，$a^x=b^{-x}>0$. $a=1$ のときには，後出の (G) によりよい． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$O = \{q \,:\, q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

(D') $a > 1$, $x < y$ なら $0 < a^x < a^y$

(D) $a > 1$, $x < y$ なら $a^x < a^y$;
(E) すべての $a > 0$ に対して $a^x > 0$

証明. (D) は (D') の一部だからよい．
(E): $a > 1$ なら，(D') の不等式の最初の部分により，よい．

$0 < a < 1$ なら，$b = \dfrac{1}{a}$ とすると，$b > 1$ だが，(B) により，
$a^x = b^{-x} > 0$. $a = 1$ のときには，後出の (G) によりよい． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$O = \{q : q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

(D') $a > 1,\ x < y$ なら $0 < a^x < a^y$

(D) $a > 1,\ x < y$ なら $a^x < a^y$;
(E) すべての $a > 0$ に対して $a^x > 0$

証明． (D) は (D') の一部だからよい．

(E): $a > 1$ なら，(D') の不等式の最初の部分により，よい．

$0 < a < 1$ なら，$b = \dfrac{1}{a}$ とすると，$b > 1$ だが，(B) により，

$a^x = b^{-x} > 0$. $a = 1$ のときには，後出の (G) によりよい．**q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し， $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し， $x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$O = \{q \,:\, q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$

(D') $a > 1,\ x < y$ なら $0 < a^x < a^y$

(D) $a > 1,\ x < y$ なら $a^x < a^y$;
(E) すべての $a > 0$ に対して $a^x > 0$

証明． (D) は (D') の一部だからよい．
(E): $a > 1$ なら，(D') の不等式の最初の部分により，よい．
$0 < a < 1$ なら， $b = \dfrac{1}{a}$ とすると， $b > 1$ だが，(B) により，
$a^x = b^{-x} > 0$． $a = 1$ のときには，後出の (G) によりよい． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(F) すべての実数 x と，すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

証明． (E) により，$a^{\frac{x}{n}} > 0$ である．

$$\left(a^{\frac{x}{n}}\right)^n = \underbrace{a^{\frac{x}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{x}{n}}}_{n\ 個} = a^{\overbrace{\frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}}^{n\ 個}} = a^x.$$

したがって，n 乗根の定義から $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$ がわかる． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(F) すべての実数 x と，すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

証明. (E) により，$a^{\frac{x}{n}} > 0$ である．

$$\left(a^{\frac{x}{n}}\right)^n = \underbrace{a^{\frac{x}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{x}{n}}}_{n\text{ 個}} = a^{\overbrace{\frac{x}{n}+\cdots+\frac{x}{n}}^{n\text{ 個}}} = a^x.$$

したがって，n 乗根の定義から $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$ がわかる． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(F) すべての実数 x と，すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

証明. (E) により，$a^{\frac{x}{n}} > 0$ である．

$$\left(a^{\frac{x}{n}}\right)^n = \underbrace{a^{\frac{x}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{x}{n}}}_{n\text{ 個}} = a^{\overbrace{\frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}}^{n\text{ 個}}} = a^x.$$

したがって，n 乗根の定義から $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$ がわかる．　q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(F) すべての実数 x と，すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

証明． (E) により，$a^{\frac{x}{n}} > 0$ である．

$$\left(a^{\frac{x}{n}}\right)^n = \underbrace{a^{\frac{x}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{x}{n}}}_{n\text{ 個}} = a^{\overbrace{\frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}}^{n\text{ 個}}} = a^x.$$

したがって，n 乗根の定義から $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$ がわかる． q.e.d.

#「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(F) すべての実数 x と，すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

証明． (E) により，$a^{\frac{x}{n}} > 0$ である．

$$\left(a^{\frac{x}{n}}\right)^n = \underbrace{a^{\frac{x}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{x}{n}}}_{n\text{ 個}} = a^{\overbrace{\frac{x}{n}+\cdots+\frac{x}{n}}^{n\text{ 個}}} = a^x.$$

したがって，n 乗根の定義から $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$ がわかる． q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し， $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(F) すべての実数 x と，すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

証明． (E) により， $a^{\frac{x}{n}} > 0$ である．

$$\left(a^{\frac{x}{n}}\right)^n = \underbrace{a^{\frac{x}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{x}{n}}}_{n\ 個} = a^{\overbrace{\frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}}^{n\ 個}} = a^x.$$

したがって， n 乗根の定義から $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$ がわかる． **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

証明． 前と同じように，$O = \{q : q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数$\}$ とする．

$q \in O$ で $q = \dfrac{m}{n}$, n は奇数，とするとき，

$$(1^q)^n = \left(1^{\frac{m}{n}}\right)^n = \underbrace{1^{\frac{m}{n}} \cdot \ldots \cdot 1^{\frac{m}{n}}}_{n\text{ 個}} = 1^{\overbrace{\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}}^{n\text{ 個}}} = 1^m = 1$$ となるから，

$1^q = 1$ である．

ここで x を任意の実数とするとき，(2) により，

$$1^x = \lim_{u\to x} 1^u = \lim_{q\in O, q\to x} 1^q = \lim_{q\in O, q\to x} 1 = 1.$$ **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し， $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し， $x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

証明． 前と同じように， $O = \{q : q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$ とする．
$q \in O$ で $q = \dfrac{m}{n}$, n は奇数，とするとき，

$$(1^q)^n = \left(1^{\frac{m}{n}}\right)^n = \underbrace{1^{\frac{m}{n}} \cdot \ldots \cdot 1^{\frac{m}{n}}}_{n\text{ 個}} = 1^{\overbrace{\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}}^{n\text{ 個}}} = 1^m = 1$$ となるから，

$1^q = 1$ である．
ここで x を任意の実数とするとき，(2) により，

$$1^x = \lim_{u \to x} 1^u = \lim_{q \in O, q \to x} 1^q = \lim_{q \in O, q \to x} 1 = 1.$$

q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a>0$ に対し $a^1=a$;

(1) すべての実数 $a>0$ と b, c に対し，$a^{b+c}=a^b\cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a>0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x>0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(G) すべての実数 x に対して $1^x=1$

証明. 前と同じように，$O=\{q : q=\dfrac{m}{n}$ で n は奇数$\}$ とする．
$q\in O$ で $q=\dfrac{m}{n}$, n は奇数，とするとき，

$$(1^q)^n=\left(1^{\frac{m}{n}}\right)^n=\underbrace{1^{\frac{m}{n}}\cdot\ldots\cdot 1^{\frac{m}{n}}}_{n\text{ 個}}=1^{\overbrace{\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}}^{n\text{ 個}}}=1^m=1$$ となるから，

$1^q=1$ である．
ここで x を任意の実数とするとき，(2) により，
$$1^x=\lim_{u\to x}1^u=\lim_{q\in O,q\to x}1^q=\lim_{q\in O,q\to x}1=1.$$ q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

証明． 前と同じように，$O = \{q : q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数$\}$ とする．

$q \in O$ で $q = \dfrac{m}{n}$, n は奇数，とするとき，

$$(1^q)^n = \left(1^{\frac{m}{n}}\right)^n = \underbrace{1^{\frac{m}{n}} \cdot \ldots \cdot 1^{\frac{m}{n}}}_{n\text{ 個}} = 1^{\overbrace{\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}}^{n\text{ 個}}} = 1^m = 1$$ となるから，

$1^q = 1$ である．

ここで x を任意の実数とするとき，(2) により，

$$1^x = \lim_{u \to x} 1^u = \lim_{q \in O, q \to x} 1^q = \lim_{q \in O, q \to x} 1 = 1.$$

q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

証明. 前と同じように，$O = \{q : q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$ とする．

$q \in O$ で $q = \dfrac{m}{n}$, n は奇数，とするとき，

$$(1^q)^n = \left(1^{\frac{m}{n}}\right)^n = \underbrace{1^{\frac{m}{n}} \cdot \ldots \cdot 1^{\frac{m}{n}}}_{n\text{ 個}} = 1^{\overbrace{\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}}^{n\text{ 個}}} = 1^m = 1$$ となるから，

$1^q = 1$ である．

ここで x を任意の実数とするとき，(2) により，

$$1^x = \lim_{u \to x} 1^u = \lim_{q \in O, q \to x} 1^q = \lim_{q \in O, q \to x} 1 = 1.$$

q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

証明． 前と同じように，$O = \{q : q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数$\}$ とする．

$q \in O$ で $q = \dfrac{m}{n}$, n は奇数，とするとき，

$$(1^q)^n = \left(1^{\frac{m}{n}}\right)^n = \underbrace{1^{\frac{m}{n}} \cdot \ldots \cdot 1^{\frac{m}{n}}}_{n\text{ 個}} = 1^{\overbrace{\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}}^{n\text{ 個}}} = 1^m = 1$$ となるから，

$1^q = 1$ である．

ここで x を任意の実数とするとき，(2) により，

$$1^x = \lim_{u \to x} 1^u = \lim_{q \in O, q \to x} 1^q = \lim_{q \in O, q \to x} 1 = 1.$$

q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し, $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し, 実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である. また, すべての実数 b に対し, $x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である.

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

証明. 前と同じように, $O = \{q : q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数 $\}$ とする.

$q \in O$ で $q = \dfrac{m}{n}$, n は奇数, とするとき,

$$(1^q)^n = \left(1^{\frac{m}{n}}\right)^n = \underbrace{1^{\frac{m}{n}} \cdot \ldots \cdot 1^{\frac{m}{n}}}_{n\text{ 個}} = 1^{\overbrace{\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}}^{n\text{ 個}}} = 1^m = 1$$ となるから,

$1^q = 1$ である.

ここで x を任意の実数とするとき, (2) により,

$$1^x = \lim_{u \to x} 1^u = \lim_{q \in O, q \to x} 1^q = \lim_{q \in O, q \to x} 1 = 1.$$

q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

証明. 前と同じように，$O = \{q : q = \dfrac{m}{n}$ で n は奇数$\}$ とする．

$q \in O$ で $q = \dfrac{m}{n}$, n は奇数，とするとき，

$$(1^q)^n = \left(1^{\frac{m}{n}}\right)^n = \underbrace{1^{\frac{m}{n}} \cdot \ldots \cdot 1^{\frac{m}{n}}}_{n\text{ 個}} = 1^{\overbrace{\frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n}}^{n\text{ 個}}} = 1^m = 1$$ となるから，

$1^q = 1$ である．

ここで x を任意の実数とするとき，(2) により，

$$1^x = \lim_{u \to x} 1^u = \lim_{q \in O, q \to x} 1^q = \lim_{q \in O, q \to x} 1 = 1.$$

q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

証明. まず，x と y が有理数の場合に等式が成り立つことを示す．$x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{m'}{n'}$, また，m, n, m', n' は整数で，$n, n' > 0$ とする．このとき (F) により，

$$(a^x)^y = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m'}{n'}} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{1}{n'}}\right)^{m'} = \left(\sqrt[nn']{a^m}\right)^{m'} = \sqrt[nn']{a^{mm'}} = a^{\frac{mm'}{nn'}} = a^{xy}.$$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a>0$ に対し $a^1=a$;

(1) すべての実数 $a>0$ と b, c に対し，$a^{b+c}=a^b\cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a>0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x>0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(H) すべての $a>0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y=a^{xy}$

証明. まず，x と y が有理数の場合に等式が成り立つことを示す．$x=\dfrac{m}{n}$, $y=\dfrac{m'}{n'}$，また，m, n, m', n' は整数で，n, $n'>0$ とする．このとき (F) により，

$$(a^x)^y=\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m'}{n'}}=\left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{1}{n'}}\right)^{m'}=\left(\sqrt[nn']{a^m}\right)^{m'}=\sqrt[nn']{a^{mm'}}=a^{\frac{mm'}{nn'}}=a^{xy}.$$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

証明． まず，x と y が有理数の場合に等式が成り立つことを示す．$x = \dfrac{m}{n}$, $y = \dfrac{m'}{n'}$, また，m, n, m', n' は整数で，$n, n' > 0$ とする．このとき (F) により，

$$(a^x)^y = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m'}{n'}} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{1}{n'}}\right)^{m'} = \left(\sqrt[nn']{a^m}\right)^{m'} = \sqrt[nn']{a^{mm'}} = a^{\frac{mm'}{nn'}} = a^{xy}.$$

#「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

証明． まず，x と y が有理数の場合に等式が成り立つことを示す．$x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{m'}{n'}$, また，m, n, m', n' は整数で，n, $n' > 0$ とする．このとき (F) により，

$$(a^x)^y = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m'}{n'}} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{1}{n'}}\right)^{m'} = \left(\sqrt[nn']{a^m}\right)^{m'} = \sqrt[nn']{a^{mm'}} = a^{\frac{mm'}{nn'}} = a^{xy}.$$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a>0$ に対し $a^1=a$;

(1) すべての実数 $a>0$ と b, c に対し，$a^{b+c}=a^b\cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a>0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x>0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(H) すべての $a>0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y=a^{xy}$

証明.　まず，x と y が有理数の場合に等式が成り立つことを示す．$x=\dfrac{m}{n}$, $y=\dfrac{m'}{n'}$, また，m, n, m', n' は整数で，n, $n'>0$ とする．このとき (F) により，

$$(a^x)^y=\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m'}{n'}}=\left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{1}{n'}}\right)^{m'}=\left(\sqrt[nn']{a^m}\right)^{m'}=\sqrt[nn']{a^{mm'}}=a^{\frac{mm'}{nn'}}=a^{xy}.$$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

証明. まず，x と y が有理数の場合に等式が成り立つことを示す．$x = \dfrac{m}{n}$, $y = \dfrac{m'}{n'}$, また，m, n, m', n' は整数で，$n, n' > 0$ とする．このとき (F) により，

$$(a^x)^y = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m'}{n'}} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{1}{n'}}\right)^{m'} = \left(\sqrt[nn']{a^m}\right)^{m'} = \sqrt[nn']{a^{mm'}} = a^{\frac{mm'}{nn'}} = a^{xy}.$$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

次に，x を有理数 $\dfrac{m}{n}$, y を任意の実数とするとき (2) により，

$$(a^x)^y = \lim_{u \to y} (a^x)^u = \lim_{q \in \mathbb{Q}, q \to y} (a^x)^q = \lim_{q \in \mathbb{Q}, q \to y} a^{xq} = \lim_{q \in \mathbb{Q}, xq \to xy} a^{xq} = a^{xy}.$$

ただし $\mathbb{Q}$ で有理数の全体をあらわす．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し, $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し, 実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である. また, すべての実数 b に対し, $x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である.

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して, $(a^x)^y = a^{xy}$

次に, x を有理数 $\dfrac{m}{n}$, y を任意の実数とするとき (2) により,

$$(a^x)^y = \lim_{u \to y} (a^x)^u = \lim_{q \in \mathbb{Q}, q \to y} (a^x)^q = \lim_{q \in \mathbb{Q}, q \to y} a^{xq} = \lim_{q \in \mathbb{Q}, xq \to xy} a^{xq} = a^{xy}.$$

ただし $\mathbb{Q}$ で有理数の全体をあらわす.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a>0$ に対し $a^1=a$;

(1) すべての実数 $a>0$ と b, c に対し，$a^{b+c}=a^b\cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a>0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x>0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(H) すべての $a>0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y=a^{xy}$

最後に，x と y を任意の実数とするとき，(2)（特に後半）と前ページの結果により，

$$(a^x)^y=\left(\lim_{u\to x}a^u\right)^y=\lim_{u\to x}(a^u)^y=\lim_{u\in\mathbb{Q},u\to x}(a^u)^y=\lim_{u\in\mathbb{Q},u\to x}a^{uy}=\lim_{u\in\mathbb{Q},uy\to xy}a^{uy}=a^{xy}.$$

q.e.d.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

最後に，x と y を任意の実数とするとき，(2)（特に後半）と前ページの結果により，

$$(a^x)^y = \left(\lim_{u\to x} a^u\right)^y = \lim_{u\to x} (a^u)^y = \lim_{u\in\mathbb{Q}, u\to x} (a^u)^y = \lim_{u\in\mathbb{Q}, u\to x} a^{uy} = \lim_{u\in\mathbb{Q}, uy\to xy} a^{uy} = a^{xy}.$$

q.e.d.

（自由研究）課題

上の証明の行間をさらに埋めてください.

（自由研究）課題

上の証明の行間をさらに埋めてください.