数 学 の 考 え 方

2009 年春学期@中部大学

Sakaé Fuchino　（渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp
http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

第 9 回目の講義 (July 14, 2009 (10:36) 版)

6 月 24 日（水曜日）5-6　時限目（13:35～15:05）934 教室
6 月 30 日（火曜日）9-10 時限目（17:05～18:35）946 教室

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

上の基本性質から演算，$(a, b) \mapsto a^b$ の多くの性質が導けることを前回に確かめた:

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

上の基本性質から演算，$(a, b) \mapsto a^b$ の多くの性質が導けることを前回に確かめた:

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，
$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

上の基本性質から演算，$(a, b) \mapsto a^b$ の多くの性質が導けることを前回に確かめた:

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

a^b に関する以下の性質は，すべて，基本性質 (0)∼(2) だけから導出できる:

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{ 個}}$

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(C) $a^0 = 1$

(D) $a > 1$, $x < y$ なら $a^x < a^y$

(E) すべての実数 x に対して，$a^x > 0$

(F) すべての実数 x と自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

a^b に関する以下の性質は，すべて，基本性質 (0)〜(2) だけから導出できる:

(A) すべての自然数 $n > 0$ に対して $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{ 個}}$

(B) すべての実数 x に対して $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(C) $a^0 = 1$

(D) $a > 1$, $x < y$ なら $a^x < a^y$

(E) すべての実数 x に対して，$a^x > 0$

(F) すべての実数 x と自然数 $n > 0$ に対して $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$

(G) すべての実数 x に対して $1^x = 1$

(H) すべての $a > 0$ と実数 x, y に対して，$(a^x)^y = a^{xy}$

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，
$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

逆に，上の (0)〜(2) に対応する性質をみたす任意の演算は $(a, b) \mapsto a^b$ と一致することをこれから示す．

このことから,「(0)〜(2) から，演算 $(a, b) \mapsto a^b$ のすべての性質が導ける」という主張は，単なる経験則ではないことがわかる．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，
$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

逆に，上の (0)〜(2) に対応する性質をみたす任意の演算は
$(a, b) \mapsto a^b$ と一致することをこれから示す．

このことから，「(0)〜(2) から，演算 $(a, b) \mapsto a^b$ のすべての性質が導ける」という主張は，単なる経験則ではないことがわかる．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，
$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

逆に，上の (0)〜(2) に対応する性質をみたす任意の演算は $(a, b) \mapsto a^b$ と一致することをこれから示す．

このことから,「(0)〜(2) から，演算 $(a, b) \mapsto a^b$ のすべての性質が導ける」という主張は，単なる経験則ではないことがわかる．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，
$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$\varphi(x, y)$ を正の実数 a と実数 b に対して実数 $\varphi(a, b)$ を対応させる演算とするとき，$\varphi(x, y)$ が「(0)〜(2) に対応する性質をみたす」と言ったのは，次が成り立つことである:

(0') すべての実数 $a > 0$ に対し $\varphi(a, 1) = a$;

(1') すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，
$\varphi(a, b + c) = \varphi(a, b) \cdot \varphi(a, c)$ が成り立つ;

(2') すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 $\varphi(a, x)$ に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を $\varphi(x, b)$ に対応させる関数も連続である．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，
$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$\varphi(x, y)$ を正の実数 a と実数 b に対して実数 $\varphi(a, b)$ を対応させる演算とするとき，$\varphi(x, y)$ が「(0)〜(2) に対応する性質をみたす」と言ったのは，次が成り立つことである:

(0') すべての実数 $a > 0$ に対し $\varphi(a, 1) = a$;

(1') すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，
$\varphi(a, b + c) = \varphi(a, b) \cdot \varphi(a, c)$ が成り立つ;

(2') すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 $\varphi(a, x)$ に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を $\varphi(x, b)$ に対応させる関数も連続である．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，
$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

$\varphi(x, y)$ を正の実数 a と実数 b に対して実数 $\varphi(a, b)$ を対応させる演算とするとき，$\varphi(x, y)$ が「(0)∼(2) に対応する性質をみたす」と言ったのは，次が成り立つことである:

(0') すべての実数 $a > 0$ に対し $\varphi(a, 1) = a$;

(1') すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，
$\varphi(a, b + c) = \varphi(a, b) \cdot \varphi(a, c)$ が成り立つ;

(2') すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 $\varphi(a, x)$ に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を $\varphi(x, b)$ に対応させる関数も連続である．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

定理 1. 正の実数 a と実数 b に対して実数 $\varphi(a,b)$ を対応させる演算 $\varphi(x,y)$ が次の (0'),(1'),(2') を満たすなら，すべての正の実数 a と実数 b に対し，$\varphi(a,b)=a^b$ が成り立つ．

(0') すべての実数 $a>0$ に対し $\varphi(a,1)=a$;

(1') すべての実数 $a>0$ と すべての実数 b, c に対し，
$\varphi(a,b+c)=\varphi(a,b)\cdot\varphi(a,c)$ が成り立つ;

(2') すべての実数 $a>0$ に対し，実数 x を実数 $\varphi(a,x)$ に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x>0$ を $\varphi(x,b)$ に対応させる関数も連続である．

証明. 前回のスライドでと同様な証明で，$\varphi(x,y)$ は，(A)〜(G) に対応する性質を満たすことが示せる．このことから，**(*) すべての実数 $a>0$ とすべての有理数 $q\in\mathbb{Q}$ に対し，$\varphi(a,q)=a^q$ となる** ことがわかる．ここで任意の $a>0$ と任意の実数 b に対し，

$$\varphi(a,b)=\lim_{x\to b}\varphi(a,x)=\lim_{q\in\mathbb{Q},x\to b}\varphi(a,q)=\lim_{q\in\mathbb{Q},x\to b}a^q=a^b$$

↑ (2')　　↑ $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密　　↑ 上の (*)　　↑ (2) **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

定理 1. 正の実数 a と実数 b に対して実数 $\varphi(a,b)$ を対応させる演算 $\varphi(x,y)$ が次の (0'),(1'),(2') を満たすなら，すべての正の実数 a と実数 b に対し，$\varphi(a,b)=a^b$ が成り立つ．

(0') すべての実数 $a>0$ に対し $\varphi(a,1)=a$;

(1') すべての実数 $a>0$ と すべての実数 b, c に対し，$\varphi(a,b+c)=\varphi(a,b)\cdot\varphi(a,c)$ が成り立つ;

(2') すべての実数 $a>0$ に対し，実数 x を実数 $\varphi(a,x)$ に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x>0$ を $\varphi(x,b)$ に対応させる関数も連続である．

証明． 前回のスライドでと同様な証明で，$\varphi(x,y)$ は，(A)〜(G) に対応する性質を満たすことが示せる． このことから，(*) すべての実数 $a>0$ とすべての有理数 $q\in\mathbb{Q}$ に対し，$\varphi(a,q)=a^q$ となる ことがわかる． ここで任意の $a>0$ と任意の実数 b に対し，

$$\varphi(a,b)=\lim_{x\to b}\varphi(a,x)=\lim_{q\in\mathbb{Q},x\to b}\varphi(a,q)=\lim_{q\in\mathbb{Q},x\to b}a^q=a^b$$

↑ (2')　↑ $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密　↑ 上の (*)　↑ (2) **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

定理 1. 正の実数 a と実数 b に対して実数 $\varphi(a,b)$ を対応させる演算 $\varphi(x,y)$ が次の (0'),(1'),(2') を満たすなら，すべての正の実数 a と実数 b に対し，$\varphi(a,b)=a^b$ が成り立つ．

(0') すべての実数 $a>0$ に対し $\varphi(a,1)=a$;

(1') すべての実数 $a>0$ と すべての実数 b, c に対し，
$\varphi(a,b+c)=\varphi(a,b)\cdot\varphi(a,c)$ が成り立つ;

(2') すべての実数 $a>0$ に対し，実数 x を実数 $\varphi(a,x)$ に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x>0$ を $\varphi(x,b)$ に対応させる関数も連続である．

証明. 前回のスライドでと同様な証明で，$\varphi(x,y)$ は，(A)〜(G) に対応する性質を満たすことが示せる．このことから，(*) すべての実数 $a>0$ とすべての有理数 $q\in\mathbb{Q}$ に対し，$\varphi(a,q)=a^q$ となる ことがわかる．ここで任意の $a>0$ と任意の実数 b に対し，

$$\varphi(a,b)=\lim_{x\to b}\varphi(a,x)=\lim_{q\in\mathbb{Q},x\to b}\varphi(a,q)=\lim_{q\in\mathbb{Q},x\to b}a^q=a^b$$

↑ (2')　↑ $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密　↑ 上の (*)　↑ (2) **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

定理 1. 正の実数 a と実数 b に対して実数 $\varphi(a,b)$ を対応させる演算 $\varphi(x,y)$ が次の (0'),(1'),(2') を満たすなら，すべての正の実数 a と実数 b に対し，$\varphi(a,b)=a^b$ が成り立つ．

(0') すべての実数 $a>0$ に対し $\varphi(a,1)=a$;

(1') すべての実数 $a>0$ と すべての実数 b, c に対し，$\varphi(a,b+c)=\varphi(a,b)\cdot\varphi(a,c)$ が成り立つ;

(2') すべての実数 $a>0$ に対し，実数 x を実数 $\varphi(a,x)$ に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x>0$ を $\varphi(x,b)$ に対応させる関数も連続である．

証明. 前回のスライドでと同様な証明で，$\varphi(x,y)$ は，(A)〜(G) に対応する性質を満たすことが示せる．このことから，(*) すべての実数 $a>0$ とすべての有理数 $q\in\mathbb{Q}$ に対し，$\varphi(a,q)=a^q$ となる ことがわかる．ここで任意の $a>0$ と任意の実数 b に対し，

$$\varphi(a,b)=\lim_{x\to b}\varphi(a,x)=\lim_{q\in\mathbb{Q},x\to b}\varphi(a,q)=\lim_{q\in\mathbb{Q},x\to b}a^q=a^b$$

$\uparrow$ (2')　$\uparrow$ $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密　$\uparrow$ 上の (*)　$\uparrow$ (2) **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

定理 1. 正の実数 a と実数 b に対して実数 $\varphi(a,b)$ を対応させる演算 $\varphi(x,y)$ が次の (0'),(1'),(2') を満たすなら，すべての正の実数 a と実数 b に対し，$\varphi(a,b)=a^b$ が成り立つ．

(0') すべての実数 $a>0$ に対し $\varphi(a,1)=a$;

(1') すべての実数 $a>0$ と すべての実数 b, c に対し，
$\varphi(a,b+c)=\varphi(a,b)\cdot\varphi(a,c)$ が成り立つ;

(2') すべての実数 $a>0$ に対し，実数 x を実数 $\varphi(a,x)$ に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x>0$ を $\varphi(x,b)$ に対応させる関数も連続である．

証明. 前回のスライドでと同様な証明で，$\varphi(x,y)$ は，(A)〜(G) に対応する性質を満たすことが示せる．このことから，(*) すべての実数 $a>0$ とすべての有理数 $q\in\mathbb{Q}$ に対し，$\varphi(a,q)=a^q$ となる ことがわかる．ここで任意の $a>0$ と任意の実数 b に対し，

$$\varphi(a,b)=\lim_{x\to b}\varphi(a,x)=\lim_{q\in\mathbb{Q},x\to b}\varphi(a,q)=\lim_{q\in\mathbb{Q},x\to b}a^q=a^b$$

↑ (2')　↑ $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密　↑上の (*)　↑ (2) **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

定理 1. 正の実数 a と実数 b に対して実数 $\varphi(a,b)$ を対応させる演算 $\varphi(x,y)$ が次の (0'),(1'),(2') を満たすなら，すべての正の実数 a と実数 b に対し，$\varphi(a,b)=a^b$ が成り立つ．

(0') すべての実数 $a>0$ に対し $\varphi(a,1)=a$;

(1') すべての実数 $a>0$ と すべての実数 b, c に対し，$\varphi(a,b+c)=\varphi(a,b)\cdot\varphi(a,c)$ が成り立つ;

(2') すべての実数 $a>0$ に対し，実数 x を実数 $\varphi(a,x)$ に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x>0$ を $\varphi(x,b)$ に対応させる関数も連続である．

証明. 前回のスライドでと同様な証明で，$\varphi(x,y)$ は，(A)∼(G) に対応する性質を満たすことが示せる．このことから，(*) すべての実数 $a>0$ とすべての有理数 $q\in\mathbb{Q}$ に対し，$\varphi(a,q)=a^q$ となる ことがわかる．ここで任意の $a>0$ と任意の実数 b に対し，

$$\varphi(a,b)=\lim_{x\to b}\varphi(a,x)=\lim_{q\in\mathbb{Q},x\to b}\varphi(a,q)=\lim_{q\in\mathbb{Q},x\to b}a^q=a^b$$

↑ (2')　↑ $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密　↑ 上の (*)　↑ (2) **q.e.d.**

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

今の証明を調べてみると，(2) や (2') の後半は用いられていないことがわかる．実際，(2) の後半は，(A) ∼ (G)（これらの証明には (2) の後半は使われていなかった）と，(2) の前半から導き出せる．したがって，冪乗（べきじょう）の演算は，次の (0), (1), (2^-) で特徴付けられることがわかる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2^-) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

今の証明を調べてみると，(2) や (2′) の後半は用いられていないことがわかる．実際，(2) の後半は，(A) ∼ (G) （これらの証明には (2) の後半は使われていなかった）と，(2) の前半から導き出せる．したがって，冪乗（べきじょう）の演算は，次の (0), (1), (2^-) で特徴付けられることがわかる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2^-) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

今の証明を調べてみると，(2) や (2') の後半は用いられていないことがわかる．実際，(2) の後半は，(A) ∼ (G) （これらの証明には (2) の後半は使われていなかった）と，(2) の前半から導き出せる．したがって，冪乗（べきじょう）の演算は，次の (0), (1), (2^-) で特徴付けられることがわかる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2^-) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

今の証明を調べてみると，(2) や (2') の後半は用いられていないことがわかる．実際，(2) の後半は，(A) ∼ (G) （これらの証明には (2) の後半は使われていなかった）と，(2) の前半から導き出せる．したがって，冪乗（べきじょう）の演算は，次の (0), (1), (2⁻) で特徴付けられることがわかる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2^-) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．

「議論の出発点となる仮定が何かを明確にする」ということの例（続き）

今の証明を調べてみると，(2) や (2') の後半は用いられていないことがわかる．実際，(2) の後半は，(A) ∼ (G)（これらの証明には (2) の後半は使われていなかった）と，(2) の前半から導き出せる．したがって，冪乗（べきじょう）の演算は，次の (0), (1), (2^-) で特徴付けられることがわかる:

(0) すべての実数 $a > 0$ に対し $a^1 = a$;

(1) すべての実数 $a > 0$ と すべての実数 b, c に対し，$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ が成り立つ;

(2^-) すべての実数 $a > 0$ に対し，実数 x を実数 a^x に対応させる関数は連続である．また，すべての実数 b に対し，$x > 0$ を x^b に対応させる関数も連続である．