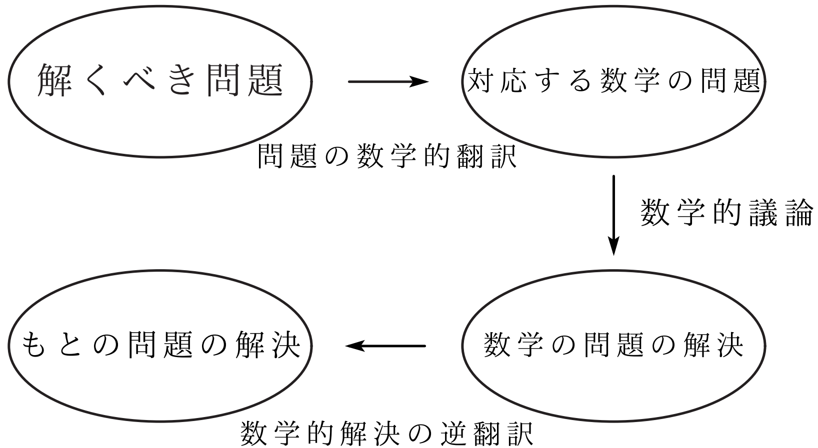
数学の考え方

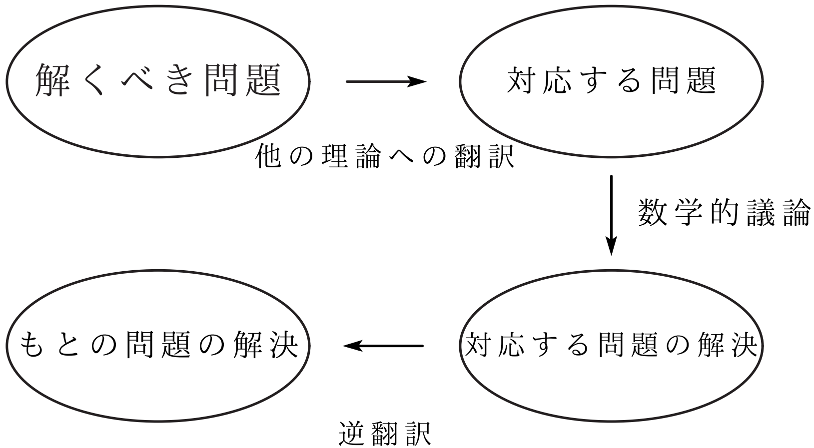
2007 年 秋学期 第 10 回目の講義
(2019 年 04 月 19 日　11:51 版)

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

一見数学とは関係のなさそうに見える問題でも数学の言葉に翻訳することで数学の問題として扱かうことができるようになるものが多い．



すでに数学の言葉で記述された数学的な問題でも，他の数学理論の言葉に翻訳することで，エレガントな解決が得られることがある．



数学の考え方 問題の数学的な翻訳

2007年6月6日　渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

前回の講義からの例

ルービックキューブの状態は，$3 \times 3 \times 6 = 54$ 上の置換群 $S(54)$ の要素に対応づけることができる．ただし，ルービックキューブがそろった状態が $S(54)$ の単位元に対応づけられるものとする．

この翻訳により，ルービックキューブの解法を求める問題は，ルービックキューブの状態に対応する $S(54)$ の要素 g が与えられたとき，そろった状態への変換に対応する g の逆元 g^{-1} をルービックキューブの1つ1つの操作に対応する $S(54)$ の要素 $g_1, g_2, \ldots, g_n$ の積 $g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n$ に分解するアルゴリズムを求める数学の問題に翻訳される．

ケーニッヒスベルクの橋の問題

18世紀ごろのケーニヒスベルクの地図

左の地図の7つの橋の部分

ケーニッヒスベルクの橋の問題

ケーニッヒスベルクの7つの橋を
それぞれ一回づつ渡って歩くことはできるか?

オイラー(**Leonhard Euler, 1707–1783**): **7**つの橋をそれぞれ一回づつ渡って歩くことはできない (**1735**年)

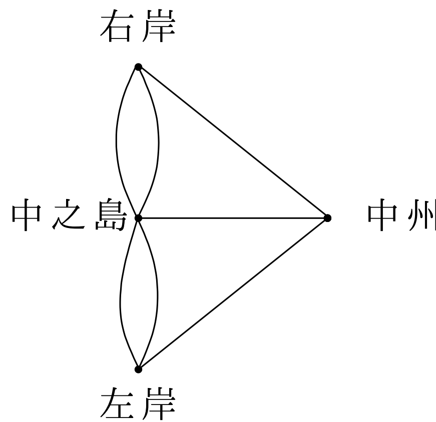
ケーニッヒスベルクの橋の問題

オイラー (Leonhard Euler, 1707 – 1783) はスイス人の数学者で，
物理学や数学の幅広い分野で多くの業績を残した．

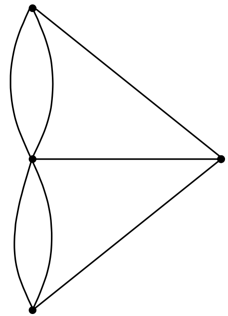
橋の問題の数学化

左の地図の7つの橋の部分

川の左岸と右岸，中之島と中洲をそれぞれ点で表し，それぞれの橋をこれらの点をむすぶ線で表すことにすると，次のグラフが得られる:



橋の問題の数学化

ケーニヒスベルクの橋の問題 $\Leftrightarrow$  左の図（グラフ）は一筆書きができるか？

グラフの理論の用語から:

上のようないくつかの点を線でむすんでできる図のことを**グラフ**とよぶ．

グラフの点のことを **頂点** とよび頂点を結ぶ線のことを **辺** とよぶ．1つの頂点につながっている辺の数を，この頂点の**次数**とぶ．

オイラーの一筆書きの定理

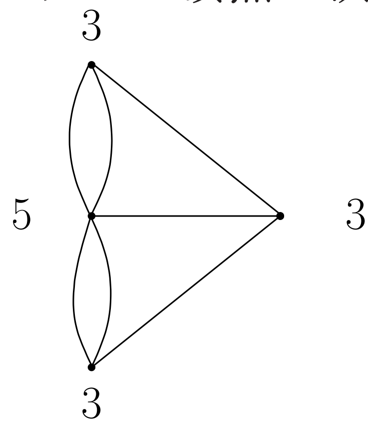
グラフの理論の用語の続き:
グラフの点のことを**頂点**とよび頂点を結ぶ線のことを**辺**とよぶ．1つの頂点につながっている辺の数を，この頂点の**次数**とよぶ．
グラフ G で，どの頂点からどの頂点へも辺をたどって移動できるとき，G は**連結**であるという．

定理（オイラーの一筆書きの定理）
連結なグラフ G が一筆書きできるのは，次の条件 (1), (2) のうちのどちらかが成り立つちょうどそのときである:

(1) すべての頂点の次数は偶数である
(2) 2つの頂点の次数が奇数でその他のすべての頂点の次数は偶数である

ケーニヒスベルクの橋の問題の解

ケーニヒスベルクの橋のグラフの頂点の次数は



となるから，オイラーの一筆書きの定理により，このグラフは一筆書きできない．この結果をもとの問題に翻訳しなおすと，**7つの橋をそれぞれ一回づつ渡って歩くことはできない** ことがわかる．

次回

オイラーの一筆書きの定理の証明