数学の考え方

2007年 秋学期 第11回目の講義
(2019年04月19日　11:55版)
渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

問題の数学的な翻訳（続き）

ケーニッヒスベルクの橋の問題

ケーニッヒスベルクの7つの橋を
それぞれ一回づつ渡って歩くことはできるか？

オイラー(**Leonhard Euler, 1707–1783**): **7**つの橋をそれぞれ一回づつ渡って歩くことはできない (**1735**年 — 享保（きょうほう）**20**年)

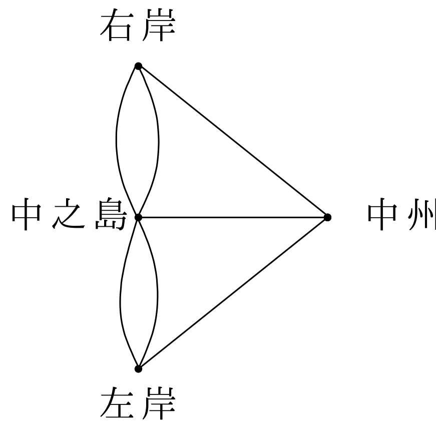
ケーニッヒスベルクの橋の問題

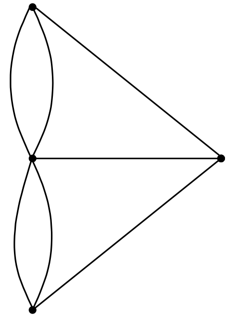
オイラー (Leonhard Euler, 1707 – 1783) はスイス人の数学者で，
物理学や数学の幅広い分野で多くの業績を残した．

橋の問題の数学化

左の地図の7つの橋の部分

川の左岸と右岸，中之島と中洲をそれぞれ点で表し，それぞれの橋をこれらの点をむすぶ線で表すことにすると，次のグラフが得られる:



ケーニヒスベルクの橋の問題 $\Longleftrightarrow$  左の図（グラフ）は一筆書きができるか?

グラフの理論の用語から:

上のようないくつかの点を線でむすんでできる図のことを**グラフ**とよぶ.

グラフの点のことを **頂点**とよび頂点を結ぶ線のことを **辺**とよぶ. 1つの頂点につながっている辺の数を, この頂点の**次数**とぶ.

オイラーの一筆書きの定理

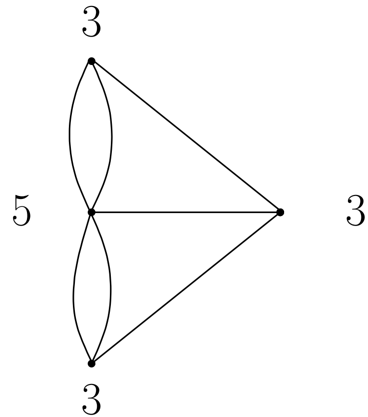
グラフの理論の用語の続き:
グラフの点のことを **頂点** とよび頂点を結ぶ線のことを **辺** とよぶ．1つの頂点につながっている辺の数を，この頂点の **次数** とぶ．
グラフ G で，どの頂点からどの頂点へも辺をたどって移動できるとき，G は **連結** であるという．

定理（オイラーの一筆書きの定理）
連結なグラフ G が一筆書きできるのは，次の条件 (1), (2) のうちのどちらかが成り立つちょうどそのときである:

(1) すべての頂点の次数は偶数である
(2) 2つの頂点の次数が奇数でその他のすべての頂点の次数は偶数である

一筆書きの定理からのケーニヒスベルクの橋の問題の解

ケーニヒスベルクの橋のグラフの頂点の次数は



となるから，オイラーの一筆書きの定理により，このグラフは一筆書きできない．この結果をもとの問題に翻訳しなおすと，**7つの橋をそれぞれ一回づつ渡って歩くことはできない** ことがわかる．

オイラーの一筆書きの定理の証明

つぎの 2 つの主張が証明できればよい.

(A) すべての連結なグラフ G について，G の一筆書きができれば，G は (1) と (2) のどちらかを満たす.

(B) すべての連結なグラフ G について，G が (1) と (2) のいずれかを満たせば G は一筆書きができる.

上の **(A)** は次と同じ:

(A)' すべての連結なグラフ (G) について，G が (1) も (2) も満たさなければ，G は一筆書きできない.

注意. ケーニヒスベルクの橋の問題の解決には **(A)'** で十分.

論理に関する補足

α, β を数学的な主張（命題）とする.

「α が成り立つのは，β が成り立つちょうどそのときである」とき α と β は同値（どうち）である，という.

つまり α と β が同値であるとは,

「α ならば β」と「β ならば α」の両方が成り立つ

ことである.

「α ならば β」は「$\alpha \Rightarrow \beta$」とも書く. α と β が同値であることは「$\alpha \Leftrightarrow \beta$」ともあらわす.

「α ならば β」は，この命題の**対偶命題**（たいぐうめいだい）である「β でない，ならば α でない」と同値である.

論理に関する補足（続き）

「$x = y^2$ となるような y が存在しない<u>なら</u> $x < 0$ である」
の **対偶命題** は:
「$x < 0$ でない<u>なら</u> $x = y^2$ となるような y が存在する」

注意. 上の例での「$x = y^2$ となるような y が存在しない<u>なら</u> $x < 0$ である」という命題は，x, y をどこで解釈するかによって正しくなることもあるし正しくなくなることもある.

x と y を実数の全体の中で解釈するときには，この命題は正しいが，x と y を整数の範囲で解釈するときには，この命題は正しくない. x と y を複素数の範囲で解釈するときにも，この命題は正しくなくなる.

論理に関する補足（続きその2）

日常語では,「なら」あるいは「ならば」は論理的な帰結以外のことを表していることもあるが，この場合には，対偶命題が作れなかったり，作れても，もとと違う意味になってしまったりする．

例．

「明日雨が降るなら傘を持ってゆく」

の「なら」は，時間の推移が入っている条件付きの意思決定を表していて論理的な帰結ではない．

「傘を持ってゆかないなら明日雨が降らない」

は上とは意味が異なる．

オイラーの一筆書きの定理の証明

（A） の証明: G を一筆書きを持つ連結なグラフとする．1つ一筆書きを固定して議論する．この一筆書きの始点と終点が同じ場合とそうでない場合について証明する．

一筆書きの始点と終点が同じ場合: このときには G の各頂点につながっている辺は，一筆書きで，辺をたどっていったとき，頂点に来るときに通った辺とこの頂点から出てゆくときの辺の組に分けることができるから，それらの数（= この頂点の次数）は偶数である．したがって，(1) が成り立つ．

そうでない場合: このときには，一筆書きの始点となっている頂点と終点となっている頂点が，2つの奇数の次数を持つ頂点となり，残りの頂点の次数は偶数になる．つまり (2) が成り立つ．

オイラーの一筆書きの定理の証明

(B) は G の頂点の数に関する帰納法で示せる．この証明は2006年秋学期の「数学の考え方」講義録

http://fuchino.ddo.jp/chubu/method-math-WS06.pdf

を参照．

グラフに関連した他の有名な応用問題 (1)

四色定理

出典: フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』

四色定理（ししょくていり／よんしょくていり）とは、いかなる地図も、隣接する領域が異なる色になるように塗るには4色あれば十分だという定理である。但し飛び地のような領域は考えない。

これは、グラフ理論において「平面グラフは4彩色可能である」ということと同値である。

この問題は、グラフ理論における最も有名な未解決問題となったのであるが、1976年に ケネス・アッペル (Kenneth Appel) とウルフガング・ハーケン (Wolfgang Haken) によってコンピュータを駆使して証明された。

グラフに関連した他の有名な応用問題 (2)

巡回セールスマン問題 出典: フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』

巡回セールスマン問題（じゅんかい-もんだい、Traveling Salesman Problem、TSP）とは、多くの市と各市間の移動コストが与えられたとき、全ての市を一度だけ回って戻ってくるルートのうちコスト最小のものを求める問題である。この問題は、NP困難であることが知られている。

よく誤解されているが、NP困難ではあるものの巡回セールスマン問題は実質、（線形計画法と論理木を組み合わせた）分枝限定法や、（線形計画法と巡回群を組み合わせた）切除平面法により、約2000都市以内ならば普通のパーソナルコンピュータでも、およそ1日以内で厳密解を得られることが多い。