統計の手法レポート II： 解説と解答例 担当： 渕野 昌

以下は 6 月 10 日の講義の初めに提出してもらった第二回目レポートの解説 + 解答例です.

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/statistics-04s-report02.pdf

に置いてあるものと同じものです. また, 講義のホームページ

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/statistics-04s.html

にもリンクしてあります.

1. 10 人の学生の中に同じ誕生日の学生がいる確率を求めよ．ただし一年は 365 日とし，どの誕生日の組合せも等確率でおこると仮定する.（ヒント： まず余事象の確率を計算してみる）

10 人の学生の誕生日の組合せの総数は，各学生の誕生日の可能性が 365 通りあるので，$\underbrace{365 \times 365 \times \cdots \times 365}_{10} = 365^{10}$ 個である．これらの組合せが等確率でおこるとするのでこの中の一つの組合せが実際の誕生日の組合せとなっている確率は，$\frac{1}{265^{10}}$ になる．これらの組合せのうちで，10 人の中に同じ誕生日の学生が一組もない組合せの数は，$365 \times 364 \times \cdots \times 356$ 個あるので,「10 人の学生の中に同じ誕生日の学生がいる」という事象の余事象の確率は,

$$\frac{365 \times 364 \times \cdots \times 356}{365^{10}}$$

となる．したがって 10 人の学生の中に同じ誕生日の学生がいる確率は

$$1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times 356}{365^{10}}$$

となる．この値は計算機で計算してみると，$0.11694817771107768 \cdots$ となるので，およそ 11.7 % の確率であることがわかる.

2. 2 個のサイコロを投げて出た目の積を値とする確率変数を X とする．a) X の取りうる値は何か？ b) X の分布関数の値の表を作成せよ．c) $P(X \leq 3)$ を求めよ．X の期待値と分散を計算せよ.

サイコロの目の組と出た目の値を表にすると：

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

となる．したがって，X のとりうる値は上の表にあらわれた数 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36 である．たとえば，積が 6 になる，つまり $X = 6$ となる，サイコロの目の組合せは，$(6, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$ の 4 通りあり，サイコロの

目の組合せの総数は $6 \times 6 = 36$ だから，積が 6 になる確率は $\frac{4}{36}$ $(= \frac{1}{9})$ であることがわかる．このようにして得られた X の値とその確率を表にすると，

$X = x$	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

となる．この表から，

$$P(X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{5}{36}$$

である．また，X の期待値と分散は，

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{2}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \cdots = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$$

$$V(X) = 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{2}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + \cdots - \left(\frac{49}{4}\right)^2 = \frac{11515}{144} = 79.96527777777777\cdots$$

と計算できる．

3. ある確率変数 X が 0 から 3 までの連続的な値を均等にとるとき，a) X の確率密度関数は何になるか？b) $P(2.1 \le X \le 2.7)$ と $P(2.8 \le X \le 4.5)$ を求めよ．c) X の期待値と分散を計算せよ．

$f(x)$ を X の確率密度関数とすると，“X が 0 から 3 までの連続的な値を均等にとる” ということから， $f(x)$ は，区間 $[0, 1]$ で定数値をとり，この区間の外では 0 となる関数でなくてはならないことがわかる．この定数値を c として，

$$1 = P(0 \le X \le 3) = \int_0^3 c\, dx = 3c$$

だから，$c = \frac{1}{3}$ となることがわかる．これを用いると，

$$P(2.1 \le X \le 2.7) = \int_{2.1}^{2.7} \frac{1}{3}\, dx = (2.7 - 2.1) \times \frac{1}{3} = 0.2$$

$$P(2.8 \le X \le 4.5) = P(2.8 \le X \le 3) = \int_{2.8}^{3} \frac{1}{3}\, dx = (3 - 2.8) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

また期待値と分散は，

$$E(X) = \int_0^3 x \cdot \frac{1}{3}\, dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 3^2 - 0\right) = 1.5$$

$$V(X) = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{1}{3}\, dx - (1.5)^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 - (1.5)^2 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} \times 3^3 - 0\right) - (1.5)^2 = \frac{3}{4}$$

と計算できる．