

以下は7月8日の講義の初めに提出してもらった第三回目レポートの解説 + 解答例です。

<http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/statistics-04s-report03.pdf>

に置いてあるものと同じものです。また、講義の web ページ

<http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/statistics-04s.html>

にもリンクしてあります。なおこの web ページには期末試験の予想問題をリンクする予定です。チェックしてください。

1. 確率変数 X が $N(60, 64)$ に従うとき、a) $P(44 \leq X \leq 68)$ の値を求めよ。
b) $P(60 - \alpha \leq X \leq 60 + \alpha) \geq 0.95$ となる α の範囲を求めよ。

[解説と回答例] a): $N(60, 64)$ とは教科書 p.41 にもあるように、平均値 $\mu = 60$ 分散 $\sigma^2 = 64 = 8^2$ の正規分布のことである。そこにも書いてあるように、 X が $N(60, 64)$ に従うとき、 $Z = (X - 60)/8$ とすると、 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数となる。ここで、 $44 \leq X \leq 68 \Leftrightarrow (44 - 60)/8 \leq Z \leq (68 - 60)/8 \Leftrightarrow -2 \leq Z \leq 1$ なので、

$$\begin{aligned} P(44 \leq X \leq 68) &= P(-2 \leq Z \leq 1) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 1) \end{aligned}$$

となる。最後の変形は、 $N(0, 1)$ の確率密度関数が $x = 0$ を軸として左右対称であることを使っている。ここで教科書 p.114 の標準正規分布の表を見ると、 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ となるので、 $P(44 \leq X \leq 68) = 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$ となることがわかる。

b): Z を a) でと同じ確率変数とすると、

$$\begin{aligned} P(60 - \alpha \leq X \leq 60 + \alpha) \geq 0.95 &\Leftrightarrow P(-\alpha/8 \leq Z \leq \alpha/8) \geq 0.95 \\ &\Leftrightarrow P(-\alpha/8 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq \alpha/8) \geq 0.95 \\ &\Leftrightarrow 2P(0 \leq Z \leq \alpha/8) \geq 0.95 \\ &\Leftrightarrow P(0 \leq Z \leq \alpha/8) \geq 0.475 \end{aligned}$$

となるので、p.114 の表から、

$$\begin{aligned} P(60 - \alpha \leq X \leq 60 + \alpha) \geq 0.95 &\Leftrightarrow P(0 \leq Z \leq \alpha/8) \geq 0.475 \\ &\Leftrightarrow \alpha/8 \geq 1.96 \\ &\Leftrightarrow \alpha \geq 15.68 \end{aligned}$$

となる。

2. あるお菓子には K 堂製のフィギュアのおまけがついていて、このフィギュアは10個のうち1個が色つきだという。このお菓子を20箱買ったとき、色つきのフィギュアが少なくとも一つ手に入る確率を a) 二項分布を使って計算せよ。b) ポアソン分布による近似計算で求めよ。

[解説と回答例] a): 色つきのフィギュアが20箱の中に k 個入っている確率は、二項分布 $B(20, 1/10)$ であらわされる。この確率変数を X とすると、 $x = 0, 1, \dots, 20$ に対し、 $P(X = x) = {}_{20}C_x (1/10)^x (9/10)^{20-x}$ である。問題の求める確率は、買った20箱の一つ

も色つきのフィギュアが含まれていない確率を全体の確率 1 から引けばよい. 20 個のすべてに色つきのフィギュアが含まれない確率は, $P(X = 0) = \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$ だから,

$$1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

が少なくとも一つは色つきのフィギュアが含まれている確率となる. これは数値計算してみると, $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20} = 0.878423345409430\cdots$ となる.

b): ポアソン分布は,

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

の形をした分布関数を持つ確率分布である. ($x = 0, 1, 2, 3, \dots$) ここに λ は X の期待値となる. 教科書 p.37 にあるように, $np = \lambda$ で, p/n が小さいような n, p に対する二項分布 $B(n, p)$ の近似となる. この問題では, $n = 20, p = 1/10$ だから, $\lambda = 20 \times 1/10 = 2$ となる. したがって, $P(X = 0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = e^{-2}$ となるから, a) と同様に, $1 - e^{-2}$ が求める確率となる. 数値計算すると, $1 - e^{-2} = 0.864664716763387\cdots$ となり, a) で求めた値とかなりよく一致するものになることがわかる.

3. あるホエール・ウォッチング (鯨のウォッチング) のツアーでは平均して一時間に 1.5 頭の鯨が見られるという. a) 今このツアーで 1 頭の鯨が見られたとき, それから 15 分以内に鯨がもう 1 頭見られる確率を求めよ. b) このツアーが 2 時間ウォッチングを行なうとすると, ツアー中に鯨が 1 頭も見られない確率を求めよ. ただし鯨の出現回数はポアソン分布に従うものとする.

[解説と回答例] a): ある事象が単位時間内に起る回数がポアソン分布に従うとき, その事象が起って次にまた同じ事象が起るまでの時間は指数分布 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x > 0$) に従う (教科書 p.40). ここで λ はこの事象が単位時間内に起る回数の平均である. この分布の分布関数 $F(x)$ (X がこの分布に従うときの $P(X \leq x)$ を与える関数) は $1 - e^{-\lambda x}$ で与えられる. この問題では, 単位時間を一時間として鯨の出現回数の平均が 1.5 頭で, 15 分は $1/4$ 時間だから, その間に次の鯨が見られる確率は,

$$1 - e^{-1.5 \times 1/4} = 0.31271072120902776$$

となり, 約 32% となることがわかる.

b): X がポアソン分布に従うときには, $P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ となる. ただし, λ は $E(X)$ の値で, $x = 0, 1, 2, \dots$ である (教科書 p.37). 今単位時間を 2 時間として, X をこの二時間の間の鯨の出現回数を与える確率変数とすると, 2 時間の鯨の平均の出現回数は $1.5 \times 2 = 3$ となるから $\lambda = 3$ として, $3^0 = 1, 0! = 1$ に注意すると

$$P(X = 0) = \frac{3^0}{0!} e^{-3} = 0.04978706836786395\cdots$$

となり, この確率は約 5% となることがわかる.

4. 八重山列島のタイワンカブトムシのメス 8 匹の体長を測定したところ,

$$35, 39, 41, 34, 44, 35, 31, 37 \quad (\text{mm})$$

というデータが得られた, このカブトムシのメスの体長の母平均 μ の 95% の信頼区間を求めよ.

[解説と回答例] これは母平均，母分散がともに知られていないときに母平均を推定する問題（教科書 p.61～）である．まず，標本平均 \bar{X} と不偏分散（標本の分散を標本のサイズ n のかわりに $n-1$ を用いて計算したもの） U^2 を求める．ここでの標本のサイズは 8 だから，

$$\bar{X} = \frac{1}{8}(35 + 39 + 41 + 34 + 44 + 35 + 31 + 37) = 37$$

$$U^2 = \frac{1}{8-1} ((35-37)^2 + (39-37)^2 + (41-37)^2 + \cdots + (37-37)^2) = 122/7$$

したがって， $U = \sqrt{122/7}$ である．

ここで，母平均を μ とすると，

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{U/\sqrt{n}}$$

（ただし，ここでは $n=8$ ）は自由度 $n-1=8-1=7$ の t 分布に従うから，教科書 p.116 の t 分布の表で $n=7, p=1-0.95=0.05$ での値 $t=2.365$ を用いて， $|T| < 2.365$ を満たすような μ を与える区間が求めるものとなる．ここで，一般に，

$$\begin{aligned} \left| \frac{\bar{X} - \mu}{U/\sqrt{n}} \right| < t &\Leftrightarrow -t < \frac{\mu - \bar{X}}{\sqrt{U^2/n}} < t \\ &\Leftrightarrow -t\sqrt{U^2/n} < \mu - \bar{X} < t\sqrt{U^2/n} \\ &\Leftrightarrow \bar{X} - t\sqrt{U^2/n} < \mu < \bar{X} + t\sqrt{U^2/n} \end{aligned}$$

だから，これに上の値を代入して，

$$\begin{aligned} 37 - 2.365\sqrt{122/(7 \times 8)} &< \mu < 37 + 2.365\sqrt{122/(7 \times 8)} \\ \Leftrightarrow 33.50926366240997 \cdots &< \mu < 40.49073633759003 \cdots \end{aligned}$$

したがって，このカブトムシのメスの体長の平均の，上のデータからの 95%の信頼区間は，約 33.5mm ～ 40.5mm ということになる．