科目名	統計の手法	担当者名	渕　野　昌	所要時間	75 分	2009 年 7 月 23 日 (木) 13:35〜14:50 施行
持込	すべて可					
添付する解答用紙	1　枚配付（問題用紙の回収　要・否）		計算用紙　0　枚配付			

このテストの回答例と解説は，試験後に

http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/chubu/statistics-ss09-kimatsu.pdf

として掲示する予定です.

1) サイズ N のデータ $x_1, x_2,\ldots,x_N$ の平均 $\bar{x}$, 分散 s^2, 不偏分散 u^2 を $N, x_1, x_2,\ldots,x_N$ を用いた式であらわしてください.

2) 確率変数 X が $N(14, 36)$ に従うとするとき，次の (a), (b), (c) を求めてください:

(a) $P(11 \leqq X \leqq 14)$,

(b) $P(15 \leqq X \leqq 20)$,

(c) $P(X \leqq 10)$.

3) ある工場で作られている製品の 1000 個に 42 個の割合で不良品が出るという．この工場の製品を 10 個買ったとき，不良品が 2 個かそれ以上含まれている確率を計算してください.

4) 次の $\boxed{ア}$ から $\boxed{コ}$ にあてはまる数値や式を答えてください.

ある伝染病の感染率（この病気にかかっている人の全人口に対する割合）が 10% になっているとき，500 人の人が，あるイベントに集まったとして，この中の 60 人以上の人がこの伝染病にかかっている確率を求めたい．このために，次のように考える: イベントに集まった 500 人のうちの，この伝染病にかかっている人の人数を返す確率変数を X とすると，X は $Bin(\boxed{ア}, \boxed{イ})$ に従うと考えられるから，X は，近似的に $N(\boxed{ウ}, \boxed{エ})$ に従う．よって，

$$Z = \frac{X - \boxed{オ}}{\boxed{カ}}$$

は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．ここで

$$P(60 \leqq X) = P(\boxed{キ} \leqq Z) = 0.5 - P(\boxed{ク} \leqq Z \leqq \boxed{ケ})$$

と標準正規分布の数表を使うと，求める確率は，$P(60 \leqq X) \approx \boxed{コ}$ となることがわかる.

5) ある母集団に属す個体の長さの平均を推定したい．長さの標準偏差は 3 (cm) であることがわかっているとする．サイズが 9 の標本をとったとき，標本平均が 20.5 (cm) なら，この長さの母集団での平均の信頼度 95% の信頼区間が何になるか答えてください.

6) ある農園のリンゴを 4 個無作為にとってそれらの重さを計ったところ，373, 415, 391, 401 (g) だった.

(1) 4 個のリンゴの重さの平均を求めてください.

(2) この 4 個のリンゴからなる標本の不偏分散を求めてください.

(3) t-分布を用いて，このデータから，農園のリンゴの重さの平均の信頼度 95% の信頼区間を求めてください.

統計の手法　09年度春学期期末試験問題の解答例と解説

解答は間違いのないよう注意をはらって作成しているつもりですが，もし間違いや不明な点があれば，指摘してください．　　　渕野 昌

1) サイズ N のデータ $x_1, x_2, \ldots, x_N$ の平均 $\bar{x}$, 分散 s^2, 不偏分散 u^2 を $N, x_1, x_2, \ldots, x_N$ を用いた式であらわしてください．

平均 $\bar{x}$, 分散 s^2, 不偏分散 u^2 はそれぞれ,

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k, \\
s^2 &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k)^2-\bar{x}^2 \\
u^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\bar{x})^2 \quad \left(=\frac{N}{N-1}s^2\right)
\end{aligned}
$$

2) 確率変数 X が $N(14, 36)$ に従うとするとき，次の (a), (b), (c) を求めてください:

(a) $P(11 \leqq X \leqq 14)$,
(b) $P(15 \leqq X \leqq 20)$,
(c) $P(X \leqq 10)$.

$\sqrt{36} = 6$ だから，X が $N(14, 36)$ に従うとき，$Z = \dfrac{X-14}{6}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．

(a): $11 \leqq X \leqq 14 \Leftrightarrow \dfrac{11-14}{6} \leqq Z \leqq \dfrac{14-14}{6} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqq Z \leqq 0$
だから，教科書 p.201 の標準正規分布の数値表から,
$P(11 \leqq X \leqq 14) = P(-\dfrac{1}{2} \leqq Z \leqq 0) = P(0 \leqq Z \leqq \dfrac{1}{2}) \fallingdotseq 0.1915$

(b): $15 \leqq X \leqq 20 \Leftrightarrow \dfrac{15-14}{6} \leqq Z \leqq \dfrac{20-14}{6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{6} \leqq Z \leqq 1$
だから，教科書 p.201 の標準正規分布の数値表から,
$P(15 \leqq X \leqq 20) = P(\dfrac{1}{6} \leqq Z \leqq 1) = P(0 \leqq Z \leqq 1) - P(0 \leqq Z \leqq \dfrac{1}{6}) \fallingdotseq 0.3413 - 0.0675 = 0.2738$

(c): $X \leqq 10 \Leftrightarrow Z \leqq \dfrac{10-14}{6} \Leftrightarrow Z \leqq -\dfrac{2}{3}$
だから，教科書 p.201 の標準正規分布の数値表から,
$P(X \leqq 10) = P(Z \leqq -\dfrac{2}{3}) = 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq \dfrac{2}{6}) \fallingdotseq 0.5 - 0.2486 = 0.2514$

3) ある工場で作られている製品の 1000 個に 42 個の割合で不良品が出るという．この工場の製品を 10 個買ったとき，不良品が 2 個かそれ以上含まれている確率を計算してください．

X を，買った 10 個の製品のうちに入っている不良品の数を返す確立変数とすると，X は，$Bin(10, 0.042)$ に従うから,
$P(X \geqq 2) = 1 - P(0 \leqq X \leqq 1) = 1 - ((1-0.042)^{10} + 10 \times (0.042) \times (1-0.042)^9) \fallingdotseq 0.063$
だから，求める確率は約 6.3%.
別解: $Bin(10, 0.042)$ は Poison 分布 $Po(0.42)$ で近似できるから，X_0 を $Po(0.42)$ に従う確率変数とすれば，$P(X \geqq 2) \approx P(X_0 \geqq 2) = 1 - (P(X_0 = 0) + P(X_0 = 1)) = 1 - \left(\dfrac{0.42^0 \times e^{-0.42}}{0!} + \dfrac{0.42^1 \times e^{-0.42}}{1!}\right) \fallingdotseq 0.067$ となる．

4) 次の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{コ}}$ にあてはまる数値や式を答えてください．

ある伝染病の感染率（この病気にかかっている人の全人口に対する割合）が 10% になっているとき，500 人の人が，あるイベントに集まったとして，この中の 60 人以上の人がこの伝染病にかかっている確率を求めたい．このために，次のように考える: イベントに集まった 500 人のうちの，この伝染病にかかっている人の人数を返す確率変数を X とすると，X は $Bin(\boxed{500}, \boxed{0.1})$ に従うと考えられるから，X は，近似的に $N(\boxed{50}, \boxed{45})$ に従う．よって,

$$
Z = \frac{X - \boxed{50}}{\boxed{\sqrt{45}}}
$$

は近似的に標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．ここで

$$P(60 \leqq X) = P\left(\boxed{\frac{60-50}{\sqrt{45}}} \leqq Z\right) = 0.5 - P\left(\boxed{\quad 0 \quad} \leqq Z \leqq \boxed{\frac{60-50}{\sqrt{45}}}\right)$$

と標準正規分布の数表を使うと， 求める確率は，$P(60 \leqq X) \approx \boxed{0.0681}$ となることがわかる．

5) ある母集団に属す個体の長さの平均を推定したい．長さの標準偏差は 3 (cm) であることがわかっているとする．サイズが 9 の標本をとったとき，標本平均が 20.5 (cm) なら，この長さの母集団での平均の信頼度 95% の信頼区間が何になるか答えてください．

教科書の p.112〜p.113 にあるような考察により，母分布が正規分布であると仮定すると (この場合標本のサイズが大きくないので，この仮定は必要である)，母平均 μ の信頼度 95% の信頼区間は，

$$20.5 - 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{9}} \leqq \mu \leqq 20.5 + 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{9}}$$

となる．両辺の式を計算すると，$18.54 \leqq \mu \leqq 22.46$ (cm) となることがわかる．

6) ある農園のリンゴを 4 個無作為にとってそれらの重さを計ったところ，373, 415, 391, 401 (g) だった．

(1) 4 個のリンゴの重さの平均を求めてください．

(2) この 4 個のリンゴからなる標本の不偏分散を求めてください．

(3) t-分布を用いて，このデータから，農園のリンゴの重さの平均の信頼度 95% の信頼区間を求めてください．

リンゴの重さの平均を $\bar{x}$ とすると

$$\bar{x} = \frac{373 + 415 + 391 + 401}{4} = 395 \quad \text{(g)}$$

普遍分散を u^2 であらわすことにすると

$$u^2 = \frac{1}{4-1} \cdot ((373-395)^2 + (415-395)^2 + (391-395)^2 + (401-395)^2) = 312 \quad (\text{g}^2)$$

したがって $u = \sqrt{312} \doteqdot 17.66$ である．ここでのデータのサイズは 4 だから，自由度は 3． 教科書 p.202 の数表から，$t_3(0.025) = 3.182$ となるので，母平均を μ であらわすことにして，求める信頼区間は

$$395 - 3.182 \times \frac{17.66}{\sqrt{4}} \leqq \mu \leqq 395 + 3.182 \times \frac{17.66}{\sqrt{4}}$$

となるから両辺を計算して，$366.9 \leqq \mu \leqq 423.1$ (g) である．