2009 年春学期 統計の手法 演習 No.1

解説と解答例

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

fuchino@isc.chubu.ac.jp

(2009 年 07 月 14 日)

以下は，2009 年春学期に中部大学で開講している「統計の手法」（木曜 5〜6 時限）の第 1 回目の演習問題とその解説／解答例です．この演習問題は

http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/chubu/statistics-ss09-uebung01.pdf

としてダウンロードできます．
解答例は十分に注意をはらって作成しているつもりですが，もし何かの誤りや問題点などを発見したときにはお知らせください．

2009 年春学期 統計の演習 No.1 **担当： 渕野 昌** (2009 年 6 月 18 日 (木))

以下の問題と問題の回答を，解答用紙にまとめて 6 月 18 日の講義時間の終り に提出してください（結果だけを書くのではなく，問題自身や，全体的な説明，計算の途中経過の説明なども，よく分るよう工夫して，できるだけ詳しく書いてください）．分らないときには，周りの友達にきいてもいいですが，その場合でも，まる写しするのではなく，自分で理解して書いてください．
この問題用紙は持ち帰って，分らなかった問題については各自で考えてみておいてください．なお，解答は返却しませんので，必要なら，自分用のコピー（下書き?）をとっておいてください．
この演習問題の課題やその解答と解説を含め，関連資料を

`http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/chubu/index.html`

からリンクをたどってダウンロードできるようにしますので，チェックしてください．

---

1. さいころを 2 つ投げたとき，出た目の大きい方の数を返す確率変数を X, 両方の目の和を 3 で割ったときの余りを返す確率変数を Y とします.

(a) X と Y の同時確率分布表を作成してください.
(b) $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$ を求めてください.
(c) $C(X,Y)$ と $\rho(X,Y)$ を求めてください
— $C(X,Y)$, $\rho(X,Y)$ については教科書 69 ページを参照してください.
(d) X と Y は独立かどうかを調べてください.

2. 10 回に 1 回の割合であたりくじの出るくじを 10 回ひいたときについて，次に答えてください:

(a) 一回もあたりくじが出ない確率を求めてください.
(b) （10 回ひいたくじのうち）ちょうど一回だけあたりくじになっている確率を求めてください.
(c) 3 つかそれ以上あたりくじが出る確率を求めてくささい.

3. ある工場では，製品の 1000 個に 64.5 個の割合で不良品が出るという．この工場の製品を 12 個買ったとき，不良品が 2 つかそれ以上含まれている確率を，計算してください.

注意． 2., 3. の確率の計算で，具体的な数値の計算が手持ちの電卓の計算能力内できないときには，その確率を計算するための（具体的な）数式を書いてください．電卓で計算した場合にも，何を計算してその確率が求まったのかが分るような解答を書いてください．また，なぜその計算で題意の確率が求まるのかも，できるだけ詳しく説明してください.

解答例と解説

1. (a): ふたつのサイコロの目と X, Y の値を表にすると,

X

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Y

	1	2	3	4	5	6
1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2
3	1	2	0	1	2	0
4	2	0	1	2	0	1
5	0	1	2	0	1	2
6	1	2	0	1	2	0

となる．これを用いると， X と Y の同時確率分布表は,

X \ Y	0	1	2	計
1	0	0	1/36	1/36
2	2/36	1/36	0	3/36
3	1/36	2/36	2/36	5/36
4	2/36	2/36	3/36	7/36
5	4/36	3/36	2/36	9/36
6	3/36	4/36	4/36	11/36
計	1/3	1/3	1/3	

となることがわかる.

(b): X と Y の同時確率分布表の "計" の欄の値を用いて,

$E(X) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \frac{161}{36} = 4.47\dot{2}$

$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{36} + 2^2 \times \frac{3}{36} + 3^2 \times \frac{5}{36} + 4^2 \times \frac{7}{36} + 5^2 \times \frac{9}{36} + 6^2 \times \frac{11}{36} = \frac{791}{36} = 21.97\dot{2}$

ここで，教科書 p.55 のポイント（期待値・分散の基本性質）(2) を用いて,

$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{791}{36} - (\frac{161}{36})^2 = 2555/1296 \approx 1.97.$

同様に,

$E(Y) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$E(Y^2) = 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$V(Y) = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2 = \frac{5}{3} - 1^2 = \frac{2}{3}.$

(c): X と Y の同時確率分布表から,

$$\begin{aligned}E(XY) = {} & 1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{36} + 2 \cdot 0 \cdot \tfrac{2}{36} + 2 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{36} + 2 \cdot 2 \cdot 0 \\ & + 3 \cdot 0 \cdot \tfrac{1}{36} + 3 \cdot 1 \cdot \tfrac{2}{36} + 3 \cdot 2 \cdot \tfrac{2}{36} + 4 \cdot 0 \cdot \tfrac{2}{36} + 4 \cdot 1 \cdot \tfrac{2}{36} + 4 \cdot 2 \cdot \tfrac{3}{36} \\ & + 5 \cdot 0 \cdot \tfrac{4}{36} + 5 \cdot 1 \cdot \tfrac{3}{36} + 5 \cdot 2 \cdot \tfrac{2}{36} + 6 \cdot 0 \cdot \tfrac{3}{36} + 6 \cdot 1 \cdot \tfrac{4}{36} + 6 \cdot 2 \cdot \tfrac{4}{36} \\ & 161/36\end{aligned}$$

したがって，教科書 p.69 の演習問題 2.2.2 (1) の等式を用いると,

$C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{161}{36} - \frac{161}{36} \cdot 1 = 0, \qquad \rho(X, Y) = \frac{C(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(X)} = 0$

となる.

(d): (c) からは X と Y が独立でないことは結論づけることはできない．しかし，同時確率分布表から，例えば，$P(X = 1, Y = 0) = 0 \neq \frac{1}{108} = P(X = 1) \cdot P(Y = 0)$ だから，X と Y は独立でないことがわかる.

2. X をこのくじを10回ひいたときの当りくじの出た回数を返す確率変数とすると，X は，$Bin(10, 1/10)$ に従う．したがって，この X に関する確率は，$0 \leqq k \leqq 10$ となる整数 k に対して，

$$P(X=k) = {}_{10}C_k \left(\tfrac{1}{10}\right)^k \left(\tfrac{9}{10}\right)^{10-k} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

で求められる．

(a): 上の (*) の k に 0 を代入すると，$P(X=0) = {}_{10}C_0 \left(\tfrac{1}{10}\right)^0 \left(\tfrac{9}{10}\right)^{10} = \left(\tfrac{9}{10}\right)^{10}$ となるから，この数値計算すると，$P(X=0) \approx 0.35$ が得られる．

(b): (*) の k に 1 を代入すると，$P(X=1) = {}_{10}C_1 \cdot \left(\tfrac{1}{10}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{9}{10}\right)^9 = 10 \left(\tfrac{1}{10}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{9}{10}\right)^9$ となるから，この数値計算をすると，$P(X=1) \approx 0.39$ が得られる．

(c): 3つかそれ以上当りくじが出る確率は:
$P(X \geqq 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$ で計算できるから，この値を数値計算してみると，$P(X \geqq 3) \approx 0.07$ が得られる．

3. X を12個買った製品のうちの不良品の数を返す確率変数とするとき，X は，$Bin(12, \frac{64.5}{1000})$ に従うと考えられるから，2.(c) と同様の計算をすると，

$P(X \geqq 2) = 1 - (P(X \geqq 0) + P(X \geqq 1)) = 1 - (\left(\tfrac{935.5}{1000}\right)^{12} + 12 \cdot \tfrac{64.5}{1000} \cdot \left(\tfrac{935.5}{1000}\right)^{11}) \approx 0.18$ となる．

X は近似的にポワソン分布 $Po(\frac{64.5}{1000} \cdot 12)$ に従うと考えられるから，$\frac{64.5}{1000} \cdot 12 = \frac{387}{500}$ により，
$P(X \geqq 2) \approx 1 - (e^{-\frac{387}{500}} + \frac{387}{500} e^{-\frac{387}{500}}) \approx 0.18$ となり，厳密な計算と小数点以下2桁の精度で一致する値が得られることが確かめられる（もっと下の桁まで計算したときには，厳密な計算による値は $0.17898552262189038\cdots$ で，ポワソン分布による近似計算では 0.18189379521983984 である）．