ベクトル解析 レポート No.1　担当者: 渕野 昌　(2007 年 10 月 30 日)
略解と解説

---

1. 任意のベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 対して次の等式が成り立つことを証明せよ:
(1) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$
(2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{B})=-2\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

2. $\mathbf{A}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{C}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ とする．このとき，次を求めよ．
(a) $\mathbf{A}$ と同じ方向を持つ単位ベクトル　(b) $\mathbf{A}-\dfrac{1}{2}\mathbf{B}$　(c) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$
(d) $\mathbf{C}\times\mathbf{B}$　(e) $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ に垂直な大きさが 1 のベクトル $\mathbf{u}$ で，$\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{u}$ が右手系となるもの
(f) $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\times(\mathbf{B}-\mathbf{C})$

3. 単位ベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ が $\mathbf{u}+\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ かつ $\mathbf{u}-\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ を満たすとする．ことのき，$\mathbf{u}+\mathbf{v}$ と $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ は直交する．
(a) このことを図を描いて説明せよ．　(b) このことを内積の計算を用いて示せ．

4. $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ をベクトル関数とするとき，$\dfrac{d}{dt}|\mathbf{r}|=\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\cdot\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ となることを示せ．

5. ベクトル関数 $\mathbf{A}(u)$ を $\mathbf{A}(u)=u\mathbf{i}+\dfrac{1}{u}\mathbf{j}+\dfrac{1}{u^2}\mathbf{k}$ で定義する．このとき $\displaystyle\int_1^2\mathbf{A}(u)\,du$ を求めよ．

6. スカラー場 φ が $\varphi(x,y,z)=x^2\log y-x^4z^3$ で与えられているとき，次を求めよ．
(a) $\nabla\varphi$　(b) 点 $(3,1,-1)$ での，単位ベクトル $\mathbf{u}=\dfrac{1}{4}(3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\sqrt{3}\mathbf{k})$ の方向微分 $\dfrac{d\varphi}{du}$ の値．

7. ベクトル場 $\mathbf{A}(x,y,z)=x\mathbf{i}-y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ と スカラー場 $\varphi(x,y,z)=e^{-(x+y+z)}$ に対し，教科書 p28 の式 (3) を用いて $\nabla\cdot(\varphi\mathbf{A})$ を求めよ．

---

1. (1):

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})+\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) \\
&\qquad\text{; 教科書 p.5 (3) の 2 番目の式による} \\
&= (\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}+(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot\mathbf{B} \\
&\qquad\text{; 教科書 p.5 (3) の 1 番目の式による} \\
&= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}+(-\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+(-\mathbf{B})\cdot\mathbf{B} \\
&\qquad\text{; 教科書 p.5 (3) の 2 番目の式による} \\
&= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} \\
&\qquad\text{; 教科書 p.5 (3) の 3 番目の式による} \\
&= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} \\
&\qquad\text{; 教科書 p.5 (3) の 1 番目の式による} \\
&= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}.
\end{aligned}
$$

(2):

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\times(\mathbf{A}-\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\mathbf{A}-\mathbf{B}) \\
&\qquad\text{; 教科書 p.8 (7) の 1 番目の式による} \\
&= \mathbf{A}\times\mathbf{A}+\mathbf{A}\times(-\mathbf{B})+\mathbf{B}\times\mathbf{A}+\mathbf{B}\times(-\mathbf{B}) \\
&\qquad\text{; 教科書 p.8 (7) の 2 番目の式による} \\
&= \mathbf{A}\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{B}\times\mathbf{A}-\mathbf{B}\times\mathbf{B} \\
&\qquad\text{; 教科書 p.8 (8) の 2 番目の式による} \\
&= \mathbf{A}\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\mathbf{B}-\mathbf{A}\times\mathbf{B}-\mathbf{B}\times\mathbf{B} \\
&\qquad\text{; 教科書 p.8 (6) の 1 番目の式による} \\
&= -2\mathbf{A}\times\mathbf{B} \\
&\qquad\text{; 教科書 p.8 (6) の 2 番目の式による}
\end{aligned}
$$

2. (a): $\dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}$ が $\mathbf{A}$ と同じ方向を持つ単位ベクトルである．$|\mathbf{A}| = \sqrt{2^2+1^2+5^2} = \sqrt{30}$ だから，

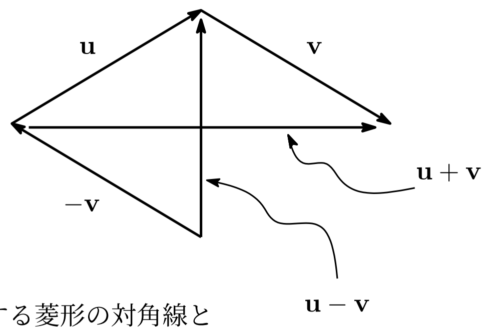
$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A} &= \frac{2}{\sqrt{30}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{30}}\mathbf{j} + \frac{5}{\sqrt{30}}\mathbf{k} \\ &= \sqrt{30}\left(\frac{1}{15}\mathbf{i} + \frac{1}{30}\mathbf{j} + \frac{1}{6}\mathbf{k}\right)\end{aligned}$$

(b), (c), (d) 略.

(e): $(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{B}\times\mathbf{C})$ は右手系になり，$\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ は $\mathbf{B}$ とも $\mathbf{C}$ とも直行する．したがって，$\dfrac{1}{|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|}\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ が求めるベクトルである．(d) の答と，教科書 p.8 (6) の 1 番目の式を使ってこのベクトルを計算することができる．

(f): **1.** (2) を用いる．

3. (a): $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$ となることに注意すると，



のように，$\mathbf{u}+\mathbf{v}$ と $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ は $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ をそれぞれ一辺とする菱形の対角線となるから，これらのベクトルは直行することがわかる．

(b): $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ も $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ もゼロベクトルと異なるので，これらが直行することをいうには，内積 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ がゼロになることを示せばよい（教科書 p.7 (6) を参照）．**1.** (1) と u と v が単位ベクトルであることを使うと，

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 1^2 - 1^2 = 0$$

となり，これは確かに成り立っていることがわかる．

4.: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ とすると，$|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}$ である．ここで，$u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とすると，（微積 II での）合成関数の微分法（微積 II の教科書では 2 変数の関数に関して書かれていが，これを 3 変数の関数に自然に拡張したもの）により，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} \\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\end{aligned}$$

5.:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \mathbf{A}(u)du &= \left(\int_1^2 udu\right)\mathbf{i} + \left(\int_1^2 \frac{1}{u}du\right)\mathbf{j} + \left(\int_1^2 \frac{1}{u^2}du\right)\mathbf{k} \\ &= \left[\frac{1}{2}u^2\right]_1^2\mathbf{i} + \Big[\log u\Big]_1^2\mathbf{j} + \left[-\frac{1}{u}\right]_1^2\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)\mathbf{i} + (\log 2 - 0)\,\mathbf{j} + \left(-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right)\mathbf{k} \\ &= \frac{3}{2}\mathbf{i} + \log 2\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}\end{aligned}$$

6. (a): $\dfrac{\partial}{\partial x}\varphi = 2x\log y - 4x^3z^3$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\varphi = \dfrac{x^2}{y}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}\varphi = 3x^4z^2$ だから,

$$\nabla\varphi = \left(2x\log y - 4x^3z^3\right)\mathbf{i} + \left(\frac{x^2}{y}\right)\mathbf{j} + \left(3x^4z^2\right)\mathbf{k}$$

(b): $\mathbf{u}$ を単位ベクトルとするとき，$\mathbf{u}$ 方向の方向微分は $\dfrac{d\varphi}{du} = \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi$ で計算されるのだったから（教科書 p.23 (4)），$\mathbf{u} = \dfrac{1}{4}(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \sqrt{3}\,\mathbf{k})$ に対しては，(a) での結果を使うと，ここでの φ の $\mathbf{u}$ 方向への方向微分は,

$$\frac{d\varphi}{du} = \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi = \frac{3}{4}\left(2x\log y - 4x^3z^3\right) + \frac{2}{4}\left(\frac{x^2}{y}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(3x^4z^2\right)$$

したがって，上式に $x = 3$, $y = 1$, $z = -1$ を代入した値

$$\frac{3}{4}\left(2\cdot 3\log 1 - 4\cdot 3^3(-1)^3\right) + \frac{2}{4}\left(\frac{3^2}{1}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(3\cdot 3^4(-1)^2\right) = \frac{171}{2} + \frac{243}{4}\sqrt{3}$$

が求める値となる.

7.: 略.