

2014年1月20日 (月) 「数理の世界」

Sylvester-Gallai の定理

↑
1893年に予想
明治26年
1944年
昭和19年に
証明

定理 (Sylvester-Gallai)

平面上に一直線上に全部はなれていないような m 個の点があるとき、このうちの2点 p, q で p と q を通る直線上には他の $m-2$ 個はどれものっていないようなものがたつ。

$m \geq 2$

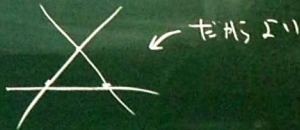
Sylvester-Gallai の定理の応用

定理 (Endre's, 1943)

平面上で全部は一直線上にないような m 点が与えられたときには、このうちのいくつと2点を通るような直線が m 本は存在する。

証明 1点あるいは2点は全部同一直線上にないので、 $m \geq 3$ としよう。

帰納法で証明することにする $m=3$ のときは



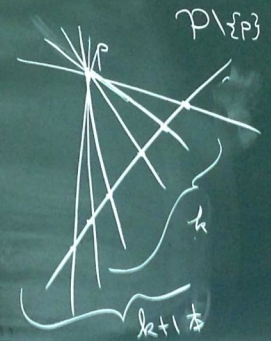
$m=k$ のときには定理が成り立つとして,
 $m=k+1$ のときにも定理が成り立つことを示す。

$k+1$ 個の点 P が同一直線上にないような
 点をとる。 (Sylvester-Gallaiの定理により
 これらの点の全体を $\mathcal{P}$ と表わすことにする)

これらの2点 $P, Q \in \mathcal{P}$ を結ぶ直線の上
 に P, Q 以外の $\mathcal{P}$ の点はないようなものが
 ある。

場合1 $\mathcal{P} \setminus \{P, Q\}$ は同一直線上にないとき
 このときにも P はこの直線上にはないから、

$\mathcal{P}$ に属する
 仮定から
 となるからよい。



場合2 $\mathcal{P} \setminus \{P, Q\}$ は同一直線上にないとき、

このときには帰納法の仮定から
 $\mathcal{P} \setminus \{P\}$ の2点を結ぶ直線は k 本以上存在する。

P と Q を結ぶ直線はこれらと異なりから、
 合わせると $k+1$ 本以上の直線がとれる。

したがって定理はすべての m に対し成り立つ
 ことが示せた。

P, Q の選り方から

Sylvester-Gallai の定理

↑
1893年に予想

明治26年

↑
1944年

昭和19年に
証明

定理 (Sylvester-Gallai)

平面上に一直線上に全部はなっていないような

m 個の点があるとき、このうちの2点 p, q で

p と q を通る直線上には他の $m-2$ 個はど

れもないようなものがわかる。

$m \geq 2$

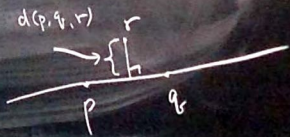
Sylvester-Gallai の定理の証明

m 個の点を定理の仮定よりこの全体を P と
あらわすことにする。

$$T := \{ (p, q, r) \mid p, q, r \in P, p, q, r \text{ は一直線上ない} \}$$

P のとり方から T は空でない。

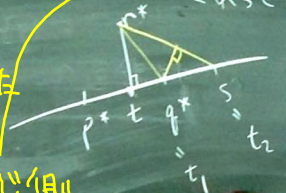
このとき $d(p, q, r) = r$ の直線 p, q 上の距離
とある $(p, q, r) \in T$ に対し



$(p^*, q^*, r^*) \in T$ で $d(p^*, q^*, r^*)$ が最小になるものを
 とす。このとき p^*, q^* は赤い点の? である (つまり p^*, q^* を赤い
 直線上には他の P の点がない) ことを示す。

もし p^*, q^* を赤い直線上に P の他の点 s があれば、
 p^*, q^*, s のうち 2点 があるものが存在する。

r^* の直線
 p^*, q^* においた
 垂線の足 t
 をはさんで同じ側



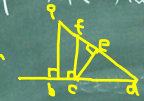
これを t に近づけたり、 t_1, t_2
 とおくとおくと

図は、(*)

$$d(p^*, q^*, r^*) > d(r^*, t_2, t_1)$$

となるが、これは p^*, q^*, r^* のうちかたに
 矛盾。

したがって p^*, q^* を赤い直線上には
 P の他の点はない、ということになり、
□



$$ce < cf < ab$$