

微分積分学 I | <http://fuchino.ddo.jp/kobe/>

担当: 伏見孝昌 (Shigeo Fuchino)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

自然数 $1, 2, 3, \dots$ natural numbers

自然数の全体の集合: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

整数の全体 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

(独: Zahlen 数)

有理数の全体 (分数といふ数)
(数)

整数は有理数 (たとえば $-7 = \frac{-7}{1}$)

$$0 = \frac{0}{256}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

(Quotient 独: 比)

$\mathbb{R}$: 実数の全体 (独: 実数)

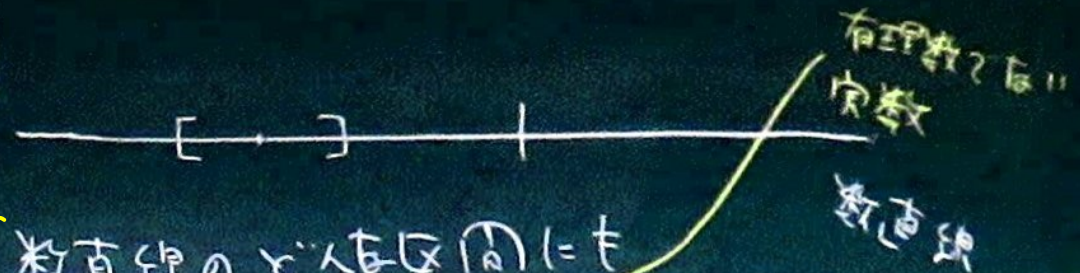
↑ 数直線上の点に対応する数たち

集合 X, Y に対し X の要素のすべてが
 Y の要素ともなっているとき X は Y の部分
 集合 (subset) であるといい $X \subseteq Y$
 とあらわす。 ($X \subseteq Y$ と書くこともある)

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ である $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
 ↑ 真に含まれている。 $\pi, e \notin \mathbb{Q} \dots$

$x \in X$
 $X \ni x$
 (x は X の要素
 である
 element)



数直線のどんな区間にも
 有理数が入っているし 無理数 が入っている。
 (どんな区間をとっても $\sqrt{2} + \frac{m}{n}$ の形の数が区間に
 含まれるが $\sqrt{2}$ は無理数である)

このことを「 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で
 稠密である」「 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は
 $\mathbb{R}$ で稠密である」と表現する

区間 - $a, b \in \mathbb{R}$ 2" $a \leq b$ のとき
($a \leq b$ とは $a < b$ と $a = b$ のこと)

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

a と b の間の閉区間
(closed interval)

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

a と b の間の开区間
(open interval)

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

半开区間
(half open interval)

$a = b$ のとき,

$$[a, b] = \{a\} (= \{b\})$$

$(a, b) = \emptyset$ 空集合 要素を1つも持たない集合

$-\infty$ と ∞ という記号を便に

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

数列 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $a_m \in \mathbb{R}$ が
定まるとき ~~無限~~ 数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$
を数列と~~い~~ $\{a_n\}$ $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ と~~い~~と
書く.

数列 $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ で $m, m' \in \mathbb{N}$ $m < m'$ なら
常に $a_m \leq a_{m'}$ とするとき, $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ は、単調
増加であるという。
(monotone increasing)

例 1 (1) $a_m = m, m \in \mathbb{N}$ とする

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 3 \quad \dots$$

である $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ は単調増加である。

(2) $a_m = 1 - \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}$ とする

$$a_1 = 1 - 1 = 0 \quad a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad a_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \dots$$

である。 $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ は単調増加である。

(3) $\pi = 3.14159265358979323846 \dots$

$a_m = \pi$ の小数点以下 m 桁までの小数表示

のとき $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ は単調増加である。

数列の極限

ある数 $a \in \mathbb{R}$

数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ について、 n をどんどん大きくすると、 a_n がどんどん a に近づくとき、 a を $\{a_n\}$ の極限 (limit) といい

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ と書く.}$$

ε - δ 論法による $\lim$ の定義

どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $N \in \mathbb{N}$ がとれて、すべての $n > N$ ($n \in \mathbb{N}$) に対し、 $|a_n - a| < \varepsilon$ とおけるようにできるとき、 a を $\{a_n\}$ の極限 ^{limit} といい

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ と書く.}$$

あるいは $a_n, n \in \mathbb{N}$ は a に収束する ^{Converge}



例 1 (1) の数列は極限を持たない。

(2) の数列は, $\{a_n\}$ は 1 に 4 収束?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi$$

completeness

実数の全体の完備性 (完全性, 連続性)

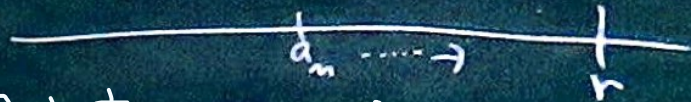
お上の 有界な 単調増加数列はある

実数に収束する。

(bounded above)

$\{a_n\}$ が 上に有界: ある実数 r があ、?

$$a_n < r \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ と なる } r.$$



このときには $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq r$ と なる。

$\mathbb{R}$ は四則演算の基本法則を満たし,
 $\mathbb{Q}$ を稠密な部分として含み
完備性を満たす, という性質で完全
に特徴づけできる。