

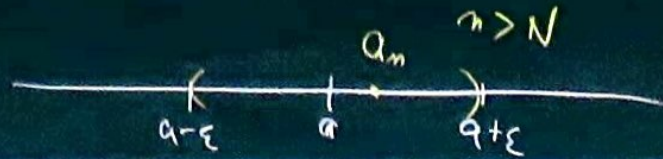
Recap: 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と実数 $a \in \mathbb{R}$ に対し

(*) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が a に収束する (または $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の極限は a)
 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converges to a

(記号では $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ あるいは $a_n \rightarrow a$ など
と書く) とは、小さな誤差範囲

どんな $\varepsilon > 0$ に対しても (十分に大きな) $N \in \mathbb{N}$ がとれて
すべての $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ に対し

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad (\text{i.e. } -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon) \text{ とできる.}$$



実数(全体) $\mathbb{R}$ の連続性 (完備性
完全性)

数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が 単調増加 (monotone increasing) ($n < m \Rightarrow a_n \leq a_m$)
で上に有界 (bounded) ($\exists r \in \mathbb{R}$ であり、すべての $n \in \mathbb{N}$ $a_n < r$ となるもの
が存在する) ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在する.

↑
 $\mathbb{R}$ の基本性質の一つ

① R は $\mathbb{Q}$ を稠密に含んでいて ($r, r_1 \in R$
 $r_1 < r_1$ ならば必ず $q \in \mathbb{Q}$ で $r_1 < q < r_1$ とできるものだけ)
dense

② $\mathbb{Q}$ と同じように $\mathbb{R}$ も演算規則を満たす
 $a(b+c) = ab+ac$
 など

③ 実数の(全体の)連続性が成り立つ。
 という性質で一意に決まる。つまり、 R が ①②③を
 満たすとすると、 $\mathbb{R}$ が唯一決まる。

$\varphi: R \rightarrow R$ で $\mathbb{Q}$ を動かす

($q \in \mathbb{Q}$ とき $\varphi(q) = q$) かつ $\mathbb{Q}$ の演算を保存する
 (つまり、 $r, s, t \in R$ に対して $r+s=t$ ならば
 $\varphi(r)+\varphi(s)=\varphi(t)$ とする) とするものだけ一意に定まる。

例 $a_n \in \mathbb{Q}$ (教科書 8~9 p. 11)
 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad n=1, 2, 3, \dots$

$(a+b)^n$ の展開式を用いて a_n は単調増加で、
 たとえば $a_n < 3$ となる $n \in \mathbb{N}$ が成り立つ。
 したがって実数(全体)の連続性から、 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する。
 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ と書く (ネイピア数, ユーラー数)

後で $(e^x)' = e^x$ となるような数として e が
再定義される。

$$e = 2.71828 \quad 18284 \quad 5905 \quad 02874 \dots$$

教科書 p6 数列の極限の基本性質

定理 1.1 数列の極限は存在すれば 1 個に
定まる。

定理 1.2 ...

(2) $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束的なら $\{a_n + b_n\}$ も収束的

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ が成り立つ} \dots$$

定理 1.3 (Triangle Inequality)
は三角形の法則

定理 1.1 の証明 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して, $a < b$ が
 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の極限と仮定して矛盾を導く。 (2 と 4)

$b - a = \varepsilon$ とおく。このとき、極限の定義から、

$N_a, N_b \in \mathbb{N}$ があって

ある $n \in \mathbb{N}$ に対し $n > N_a$ ^(仮定) $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ とする

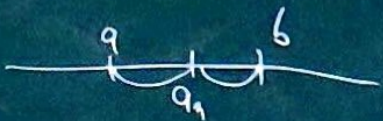
ある $n \in \mathbb{N}$ に対し $n > N_b$ ^(仮定) $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ とする

とでき、今 $n \in \mathbb{N}$ を $N_a, N_b < n$ とするものにとると、

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ かつ } |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ とする。}$$

$$\underline{b - a} = |a - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = \underline{b - a}$$

と成り矛盾。 $\square$



定理 1.2 の証明

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ とおく

数列 $\{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と $a + b$ の間に (*) に対応する性質が成り立つことを示す。

$\varepsilon > 0$ を任意にとり、(**) と (***) より $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ をとる。

すべての $n \in \mathbb{N}$ $n > N_a$ に対し $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ とする。

すべての $n \in \mathbb{N}$ $n > N_b$ に対し $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ とする。

よって、 $N = \max\{N_a, N_b\}$ とすると、

すべての $n \in \mathbb{N}$ $n > N$ に対し、
 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ とする。

↓
 $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ とする！
 (したがって極限の定義より、)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b \text{ とする。}$$

写像 (関数)

集合 X, Y に対し X の各要素 $x \in X$

↑ 数値的対象物の集まり

に対して Y の要素を1つ選ぶ選り方 f が
与えられているとき f を写像 または
mapping

関数という f で x に対応せられる Y の要素のことを
function

$f(x)$ と書く。 f が関数であることを強調するため

$f(x)$ と書くことも x はここでは「変数」といっておかれる

f が X から Y への関数 a とき $f(a)$

$f: X \rightarrow Y$ と書く。

f が具体的な対応規則により与えられているとき

たとえば $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$
と取りかかっているとき f は

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

と書いたり、 $f(x) = x^2$ などと書く

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

と書いたときには f は $[0, 1]$ から $\mathbb{R}$ への関数

一方 $f(x) = x^2$ と書いたときは関数 f は
" x^2 " の値の確定する 全ての x (つまり $\mathbb{R}$)
からの関数として考える。