復習

$\lim_{n\to\infty} a_n = b \iff$ すべての $\varepsilon > 0$ に対し $N \in \mathbb{N}$ で，[すべての $n \in \mathbb{N}$ で $n > N$ になるものに対し，$|a_n - b| < \varepsilon$ となる] ようなものが存在

$f : D \to \mathbb{R}$ と D に接している点 a ($a \in D$ でも $a \notin D$ でもよい)

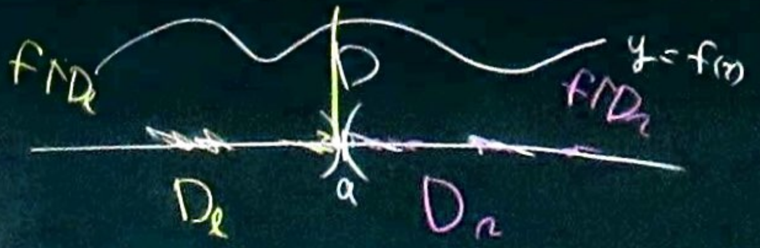
$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff$ すべての $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ で [すべての $|x - a| < \delta$ となるような $x \in D$，$x \neq a$ について (つまり，$x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D$ $x \neq a$ について) $|f(x) - b| < \varepsilon$ (つまり $f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$) となる] ようなものが存在する。

左極限，右極限

$f : D \to \mathbb{R}$ で a が D に接しているとき，$D_l = D \cap (-\infty, a)$　$D_r = D \cap (a, \infty)$ として，f を D_l に制限した関数 $f \restriction D_l$

D_r　〃　〃　$f \restriction D_r$

を考える。



$f|D_l : D_l \to \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)$

$f|D_r : D_r \to \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)$

として, $\lim_{x\to a}(f|D_l)(x)$ と $\lim_{x\to a}(f|D_r)(x)$ を $f(x)$ の a での左極限, 右極限とよび

それぞれ $\lim_{x\to a-0} f(x)$, $\lim_{x\to a+0} f(x)$ と書く

$\lim_{x\to a^-} f(x)$　$\lim_{x\to a^+} f(x)$ と書くこともある.

補題 4.1

a が D に右からも左からも接しているときには,

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \iff \lim_{x\to a-0} f(x)=b \text{ かつ } \lim_{x\to a+0} f(x)=b$$

(関数値の極限の定義からすぐにわかる)

$\Leftarrow$ の証明　$\iff$の右側が成り立っているとして左側を示す

$\varepsilon>0$ とすると, $\delta_l>0$ ($\delta_r>0$) で すべての $x\in D_l$ ($x\in D_r$) で $x\neq a$

$|x-a|<\delta_l$ ($|x-a|<\delta_r$) なら $|f(x)-b|<\varepsilon$ となるようなものがある

ここで $\delta=\min\{\delta_l, \delta_r\}$ とすると $D=D_l\cup D_r$ なので

$|x-a|<\delta$, $x\in D$ $x\neq a$ なら $|f(x)-b|<\varepsilon$ となる.

したがって $\lim_{x\to a} f(x)=b$ である. ⊠

定理3.5（教科書定理 1.8）

$f: D \to \mathbb{R}$ で a が D に接しているとき，次は同値である：

(1) $\lim_{x \to a} f(x) = b$

(2) すべての数列 $\{a_n\}$ で $a_n \in D$ で $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ となるものに対し，数列 $\{f(a_n)\}$ を考えると $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = b$ となる．

$a_n \neq a$

証明

(1) ⇒ (2)： (1)を仮定する．

$\{a_n\}$ を (2) でのようにとる（つまり $a_n \in D$ $a \neq a_n$ $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = a}$ とする）このとき $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = b$ を示したい．

つまり

［$\varepsilon > 0$ に対して $N > 0$ ですべての $n \in \mathbb{N}$ $n > N$ に対し，$|f(a_n) - b| < \varepsilon$ となることを示したい］

$\varepsilon > 0$ とする．このとき $\delta > 0$ で［すべての $x \in D$ $|x - a| < \delta$ $a \neq x$ に対し $|f(x) - b| < \varepsilon$ となる］を満たすものが存在する．いま $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = a}$ なので

$N>0$ で [すべての $n\in\mathbb{N}$ $n>N$ に対し
$|a_n-a|<\delta$ となる] を満たすものが存在する

このとき 上のような N に対して $n\in\mathbb{N}$ が
$n>N$ を満たせば, $|a_n-a|<\delta$ で仮定から
$a_n\neq a$ だから, δ の選び方から
$|f(a_n)-b|<\varepsilon$ となる

$\varepsilon>0$ は任意だったので このことから $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=b$

(1) $\Leftarrow$ (2) : 対偶を示す. (1) でないとして
(2) でないことを示す. (1) でない $\Leftrightarrow$ ある $\varepsilon^*>0$ をとると
どんな $\delta>0$ に対しても ある $x\in D$ で

"$\underbrace{A \text{ ならば } B}$" の対偶は "$\underbrace{B \text{ でないなら } A \text{ でない}}$"
論理的に同値

$|x-a|<\delta$ $x\neq a$ となっているが
$|f(x)-b|>\varepsilon^*$ となるようなものがとれる.

このとき各 $\delta=\frac{1}{n}$ に対して, $x_n\in D$ で
$|x_n-a|<\frac{1}{n}$ $x_n\neq a$ となるもので $\underbrace{|f(x_n)-b|>\varepsilon^*}_{(*)}$
となるものがとれる 数列 $\{x_n\}$ を考えると,

$\lim_{n\to\infty} x_n=a$ だが $(*)$ により, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq b$

つまり $\{x_n\}$ は (2) の反例になっているから (2) でない. $\boxtimes$

定理3.5の系

関数 $f: D\to\mathbb{R}$ と Dに接している点 a について

系4.2 (1) もし数列 x_n $n\in\mathbb{N}$ で $x_n\in D$ ($x_n\neq a$)

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ だが $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ が存在しない

ようなものが(1つでも)あれば、$\lim_{x\to a} f(x)$ は

存在しない。

(2) もし数列 x_n, $n\in\mathbb{N}$ で $x_n\in D$ $x_n\neq a$

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ で $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq b$ となるようなものが

(1つでも)存在すれば $\lim_{x\to a} f(x)\neq b$ である。

(2): 定理3.5の(2)でない ⇒ (1)でない

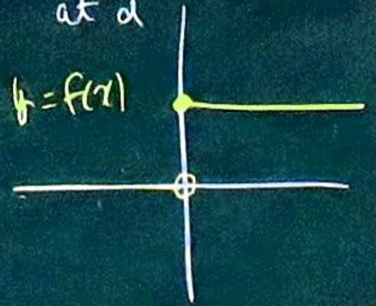
(1)はこの変形。

関数の連続性

$D=[a,b]$ とする ($a=-\infty$, $b=\infty$ も含める)

$f: D\to\mathbb{R}$ が $d\in D$ で連続である (continuous at d) とは

$\lim_{x\to d} f(x) = f(d)$ となること。



例4.3 (1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \text{ のとき} \\ 1 & x\geq 0 \text{ のとき}\end{cases}$$

とおくと

とすると、 $\alpha < 0$ なら $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0 = f(\alpha)$

$\alpha > 0$ なら $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 1 = f(\alpha)$

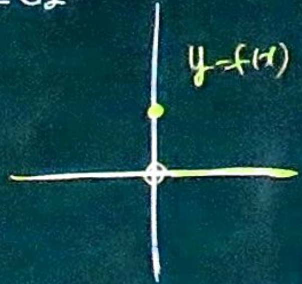
だが、$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 1$

だから、$\alpha = 0$ で $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ は存在しない

特に $f(x)$ は 0 で連続でない。

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \text{ のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$



$\alpha \neq 0$ なら $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0 = f(\alpha)$ だから f は

α で連続だが $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$

なので $f(x)$ は 0 で連続でない

$f : D \to \mathbb{R}$ $D' \subseteq D$ ($D' = D$ でもよい) について

すべての $\alpha \in D'$ に対し f が α で連続となる

とき、f は D' で連続であるという

continuous on D'

定理 4.4 (教科書の定理 1.9)

以下の (2)〜(4) では $f, g : D \to \mathbb{R}$ とする.

(−1) 定数関数 (すべての $x \in D$ に対し一定値 c を返す関数) は D で連続である.

(0) 恒等関数 (すべての $x \in D$ に対し x を返す関数) は D 連続である.

(1) f が D で連続なら cf も D で連続

(2) f と g が D で連続なら, $f+g$, $f-g$ は D で連続

(3) f と g が 〃 fg も D で連続

(4) $D_0 = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ として, f と g が D で連続なら $\dfrac{f}{g}$ は D_0 で連続

証明 (−1) (0) は明か (1)−(4) は定理 1.6 から明か

教科書

系 4.5 すべての有理関数 (多項式 または $\dfrac{\text{多項式1}}{\text{多項式2}}$ の形であらわせる関数) は連続!

その定義域上で