

定理 7.1 (Rolle's Theorem)

f が $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能と仮定。 $f(a) = f(b)$ ならば、 $a < \xi < b$ で $f'(\xi) = 0$ となるものが存在する。

証明 f は $[a, b]$ で連続なので最大値・最小値をとる点がある。もし a と b で f が最大値・最小値を同時にとるならば、 $f(a) = \text{最大値}$ $f(b) = \text{最小値}$ とすると

f は $[a, b]$ で定数関数となるから、 $f'(x) = 0$ がすべての $x \in [a, b]$ で成り立つから、任意の $a < \xi < b$ が求める点である。

なぜならば最大値・最小値のところで、 $a < \xi < b$ と仮定すると、 定理 6.5 より $f'(\xi) = 0$ となる ξ が存在するものがある。

定理 7.2 (平均値定理)

Mean Value Theorem

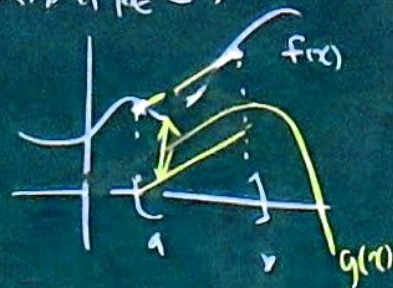
f が $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能と仮定

ならば $a < \xi < b$ で

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

となるものが存在する。

証明 $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を



⑦

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

よって $g(x)$ は $[a, b]$ で連続で (a, b) で

微分可能 $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$g(a) = f(a) \quad g(b) = f(b)$$

よって、 $g'(\xi) = 0$ とする $a < \xi < b$ があるとすれば

定理 7.1 (5.11) $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

$$\Leftrightarrow f(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

よって $f(\xi) = 0$ があるとすればよい。

□

定理 (Cauchy の平均値定理) 教科書 2.13

f, g は $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能とす。

$g(a) \neq g(b)$ と " $f'(x) \neq 0$ または $g'(x) \neq 0$ " とし。

ある $x \in (a, b)$ で成り立つとす。

よって $\xi \in (a, b)$ と " $g'(\xi) \neq 0$ " とし

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \begin{matrix} \swarrow \\ (f(b) - f(a))g'(\xi) \\ = (g(b) - g(a))f'(\xi) \end{matrix}$$

よって $f'(\xi) = 0$ とす。

証明

$$F(x) = (f(x) - f(a)) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) \quad \text{とす。} \quad \textcircled{<}$$

$$\textcircled{1} = a \text{ と } b,$$

$$F(a) = 0, F(b) = 0,$$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$$

と仮定. 定理 7.1 により, $a < \xi < b$ で

$$F'(\xi) = 0 \text{ と仮定が成り立つ}$$

$$\Downarrow f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0$$

$$\Leftrightarrow (g(b)-g(a))f'(\xi) = (f(b)-f(a))g'(\xi) = 0$$

(5) 条件は (★) を満たす!

関数の増減

(★) 減少

strictly decreasing

関数 f が 区間 (a, b) で (★) 増加である

strictly

increasing

$$\underbrace{a < c < d < b}_{\text{区間の}} \text{ に対し, } f(c) \leq f(d)$$

<

=

>

定理 7.4 (教科書 2.10)

f が 区間 I で 微分可能で (★) 区間の $x \in I$ に対し,

$f'(x) > 0$ なら f は I で 真に増加である

<

真に減少

証明 '増加' の場合を示す.

与えたいとしたいを示す. 与えたいとする, $c, d \in I$ $c < d$

④ $f(c) \geq f(d)$ とあるものがとれる。

このとき f は $[c, a]$ で微分可能だから、
連続なの？, $[c, a]$ で f に対して 定理 7.2 を

適用でき？ $c < \xi < d$ で $f'(\xi) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \leq 0$

とあるが これは (★) に矛盾がある。

④

(upward) convex

函数の 凸凹
あるいは f が $[a, b]$ で 上に凸

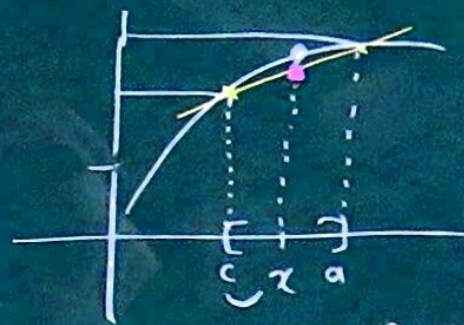
下凸
downward convex

とは、ある $a \leq c < d \leq b$ に対し $x \in (c, d)$ なら

$$f(x) > f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c} (x - c)$$

□ <

とあることは



定理 7.5 (微分定理 2.4)

f が $[a, b]$ で 2回微分
できるとき, $f''(x) \geq 0$ が
ある $x \in (a, b)$ で 成り立つ

ならば, f は $[a, b]$ で 下に凸

上に凸

$f''(x) > 0$ の場合を考える

証明 $a < c < x < d \leq b$ とする。定理 7.2.4より

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi_1) \quad \frac{f(d) - f(x)}{d - x} = f'(\xi_2) \quad \text{とある } c < \xi_1 < x < \xi_2 < d$$

定理 7.4 を f' に適用すると, f' は $[a, b]$ で 真に増加する

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \quad \text{つまり} \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < \frac{f(d) - f(x)}{d - x} \Leftrightarrow \frac{f(d) - f(c)}{d - c} (x - c) < f(x) - f(c)$$

したがって f は $[a, b]$ で 下に凸である。

例 11 $f(x) = x^3$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ について

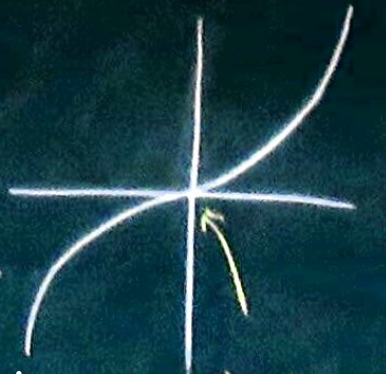
$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f(x)$	-	0	+
$f'(x)$	+	0	+
$f''(x)$	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



変曲点
(inflection point)

増減表
(curve sketching)

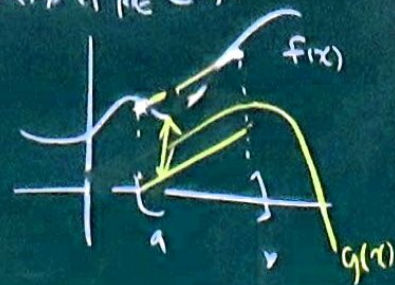
定理 7.2 (平均値定理)

Mean Value Theorem

f が $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能と仮定
すると $a < \xi < b$ で

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

とあるものが存在する。



平均値定理の変形 式の

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a) \quad \text{となる } a < \xi < b \text{ が存在する}$$

Cauchyの平均値定理を用いると上の形の平均値定理の次のような一般化が示せる:

定理 7.6 (Taylor の定理) f が $[a, b]$ で n 回微分可能とすると、

$$f(b) = f(a) + \underbrace{\left(\frac{1}{1!}\right)}_{1'} f'(a)(b-a) + \underbrace{\left(\frac{1}{2!}\right)}_{\frac{1}{2}'} f''(a)(b-a)^2 + \textcircled{\pi}$$

定理 (Cauchy の平均値定理) 教科書 2.13

f, g が $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能とすると、
 $g(a) \neq g(b)$ かつ " $f'(x) \neq 0$ または $g'(x) \neq 0$ " が
ある $x \in (a, b)$ が成り立つとある。

このとき $\xi \in (a, b)$ かつ $g'(\xi) \neq 0$ かつ

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} & (f(b) - f(a))g'(\xi) \\ & = (g(b) - g(a))f'(\xi) \end{aligned}$$

とある ξ が存在する。

証明

$$F(x) = (f(x) - f(a)) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) \quad \text{とすると} \quad \textcircled{\Leftarrow}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3!} f^{(3)}(a)(b-a)^2 + \\
 & \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} \\
 & + \boxed{\frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(b-a)^n} R_n
 \end{aligned}$$

と表すことができる。 $a < \xi < b$ がわかる。

もし $|R_n|$ が n 次以下で表すことは、

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(b-a) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1}$$

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1$$

と表すことができる。

b を変数とみて x と置き換えてみると、

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 +$$

$$\dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi_x)(x-a)^n$$

と表すことができる。 $a < \xi_x < x$ がわかる。 $x < a$ でも同様を示すことができる。

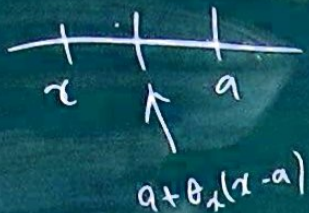
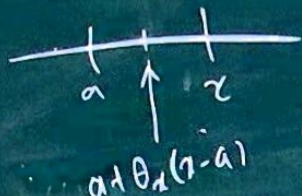
つまり $f^*(x) = f(-x)$ を $-a$ で表すことができる。

両方を表すことができる。

$f(x)$ の x と a の間の $(x-a)$ の m 回微分
可能なら,

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a)(x-a)^{m-1} + \underbrace{\frac{1}{m!} f^{(m)}(a + \theta_n(x-a))(x-a)^m}_{R_{m,x}}$$

とある $0 < \theta_n < 1$ が存在する



特 $a=0$ とすると

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)x^{n-1} + \underbrace{\frac{1}{n!} f^{(n)}(\theta_n x)x^n}_{R_{n,x}}$$

とある $0 < \theta_n < 1$ が存在する。

任意の $x \in [a, b]$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,x} = 0$ となる

とあるとき, $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x-a)^m$ ← Taylor 展開

$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0)x^m$ ← MacLaurin 展開

とある