

web: <http://fuchino.ddo.jp/~kebe/>

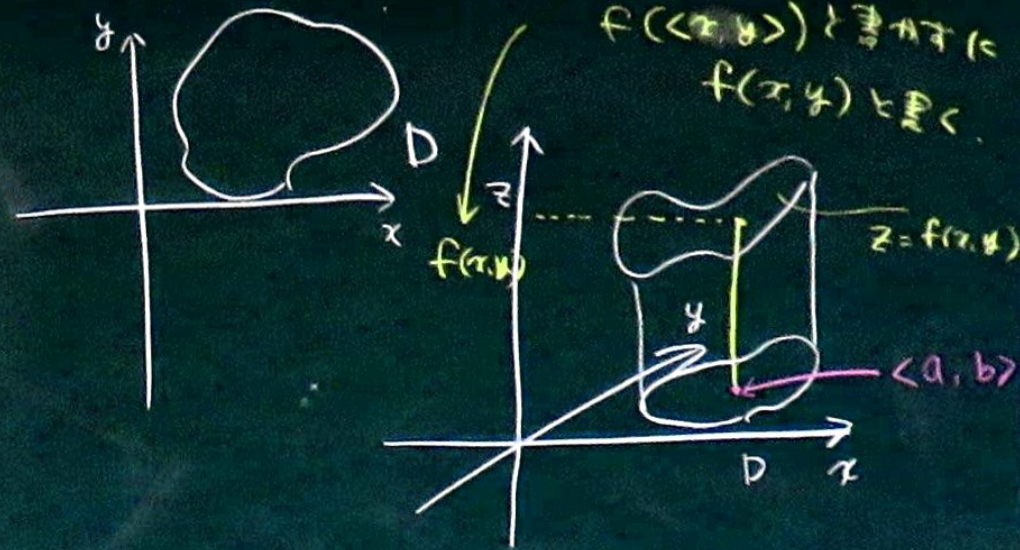
"/index.html#calculus2-2018"

微分積分学1: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
 $\quad \quad \quad \text{"} \mathbb{R}$

微分積分学2: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
 $\quad \quad \quad \text{"} \mathbb{R}^2$
2変数関数

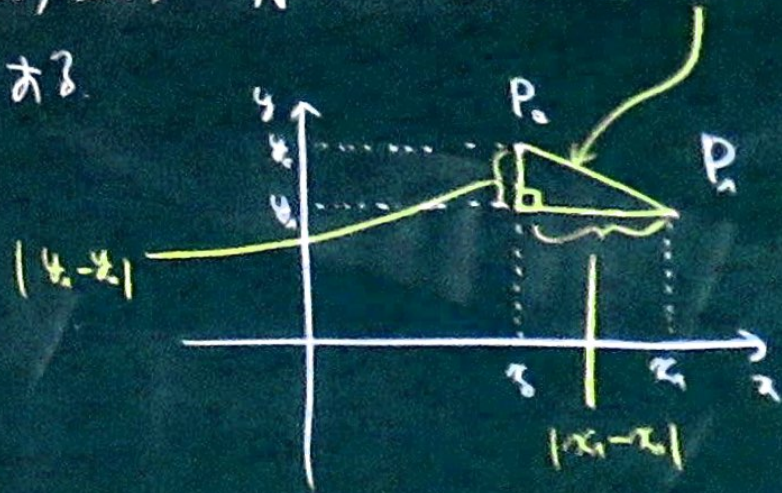
平面上の点をその座標
の組 (x, y) ($\langle x, y \rangle$ と
書くこともある) であることにすると
(ここではこの書き方を用いる.)

$\mathbb{R}^2 = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ は平面上の
点の全体からなる集合と見做す。



$\mathbb{R}$ の 2 点 x, x_1 に対して
 $|x_1 - x_0| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2}$

$\mathbb{R}^2$ の 点の間の距離 (distance). 点
 $P_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ $P_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ の間の距離を
 $d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$
 と定義する.



$$\mathbb{R}^n = \{ \langle x_1, \dots, x_m \rangle \mid x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^2 \} \text{ での}$$

$$2 \text{ 点 } P_0 = \langle x_1, \dots, x_m \rangle \text{ と } P_1 = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$$

の距離は,

$$d(P_0, P_1) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2}$$

と定義される

特に $\mathbb{R}^3$ ではこの定義は幾何学的な距離と一致する。

$\mathbb{R}^2$ でのある点 P の ε -近傍を
 (ε -neighborhood)
 或 ε -Umgebung
 とし

$$U_\varepsilon(P) = \{ Q \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, Q) < \varepsilon \}$$

と定義する。



以下では、 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ の形の関数を
 を主に考察する。 $\mathbb{R}^2$ ただし、 D は主に
 連続な曲線によって囲まれた領域とする。



$$C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad C(t)$$

$$t \mapsto \langle c_1(t), c_2(t) \rangle$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 連続関数

$C(0) = C(1)$

連続な曲線は平面を2つの領域
 に分割する (Jordan の曲線定理)

点列の極限 $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を平面上の点の
 列とする。 $\{P_n\}$ が点 P に収束する (すなわち P は
 $\{P_n\}$ の極限である) とは、

すべての $\varepsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ が与えて、すべての $m > N$
 に対して、 $P_m \in U_\varepsilon(P)$ とおこなうことができる。

関数の(値の)極限

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ とするとき,

$\bigcap_{\mathbb{R}^2} P = \langle p_1, p_2 \rangle$ が D の
角点のとき(つまり, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$U_\varepsilon(P) \cap D \neq \emptyset$ とするとき) $a \in \mathbb{R}$ とし

a が f の P での極限である(記号: $\lim_{x \rightarrow P} f(x)$)

とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で,

任意の $Q \in U_\delta(P) \cap D$ に対し, $|f(Q) - a| < \varepsilon$
となるものがとれる。

このとき a が存在するとき, $f(x)$ の値は
 $x \rightarrow P$ で a 収束するといふ。

任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し, $\delta > 0$ で

任意の $Q \in U_\delta(P) \cap D$ に対し,

$f(Q) > N$ とするものがとれるとき,

$f(Q) < -N$

f は $x \rightarrow Q$ で ∞ に ~~発散~~ するといふ $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = \infty$
 $-\infty$

と書く

$\lim_{x \rightarrow P} f(x) = -\infty$

関数の連続性

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ と $P \in D$ に対し
 $\mathbb{R}^2$ (continuous)

f が P で 連続 であるとは、

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x) = f(P) \quad \left(\lim_{x \rightarrow P} f(x) \text{ が存在して} \right. \\ \left. \text{その値が } f(P) \text{ に等しい} \right)$$

と表すこと。

例

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ と

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ のとき} \\ & (\text{つまり } \langle x, y \rangle \neq \langle 0, 0 \rangle \text{ のとき}) \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \\ & (\langle x, y \rangle = \langle 0, 0 \rangle \text{ のとき}) \end{cases}$$

とすると、 $\lim_{P \rightarrow \langle 0, 0 \rangle} f(P)$ は存在しない！

定理 1.1 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, P は D の聚点ならば

$\lim_{x \rightarrow P} f(x) = a$ ことは a と同値である

すなわち D の点列 $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (つまり

$P_n \in D$ かつ $n \in \mathbb{N}$ に対し成り立つもの)

で $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$ となるものに対し,

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = a$ となる。
 $\in \mathbb{R}$

このことから特に, P に収束する D の点列
 $\{P_n\} \{Q_n\}$ に対し,

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(Q_n)$ ならば,

$\lim_{x \rightarrow P} f(x)$ は存在しない (つまり $f(x)$ は $x \rightarrow P$ で
収束しない)

上の例の結果

$$P_n = \langle \frac{1}{n}, 0 \rangle, n \in \mathbb{N} \text{ とすると,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \langle 0, 0 \rangle \text{ である}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

$$Q_n = \langle \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \rangle, n \in \mathbb{N} \text{ とすると}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \langle 0, 0 \rangle \text{ である}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(Q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

実は,

定理 1.2

$$P = \langle P_1, P_2 \rangle \quad Q_n = \langle q_{n1}, q_{n2} \rangle$$

とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = P \iff \lim_{n \rightarrow \infty} q_{n1} = P_1 \text{ かつ}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_{n2} = P_2$$

証明

演習

