

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$\subset$
 $\mathbb{R}^2$

D は主に連続な
閉曲線で囲まれた領域とする



$$c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2; t \mapsto \langle c_1(t), c_2(t) \rangle$$

↑ ↑
連続

$$c_1(0) = c_1(1)$$

$$c_2(0) = c_2(1)$$

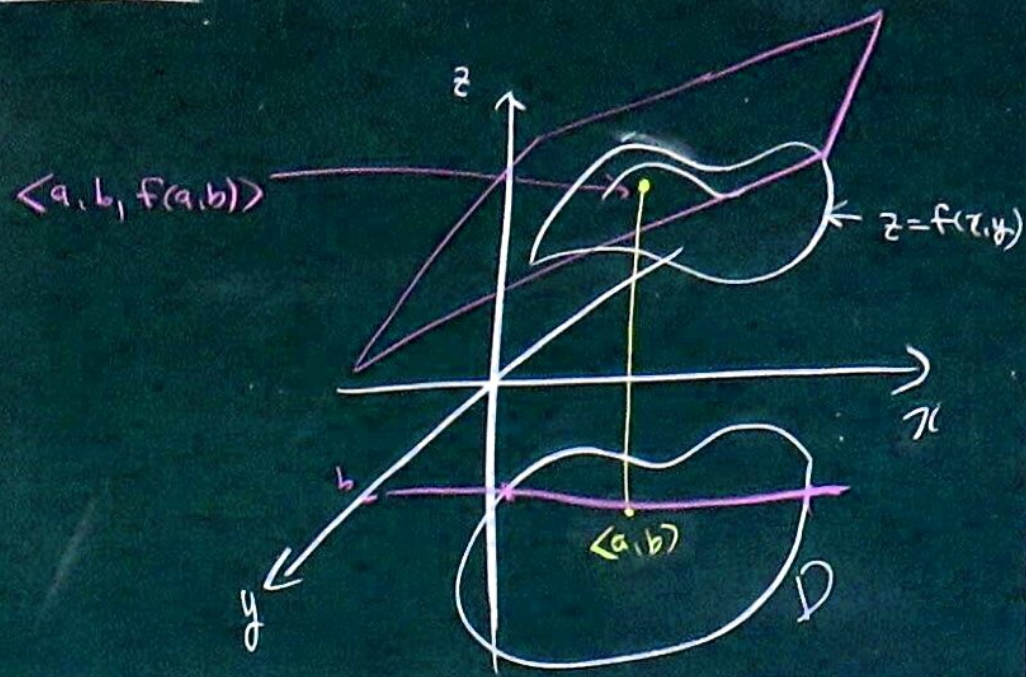
とほらふたつの

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ が D の点 $P_0 = \langle a, b \rangle$ で連続とは,

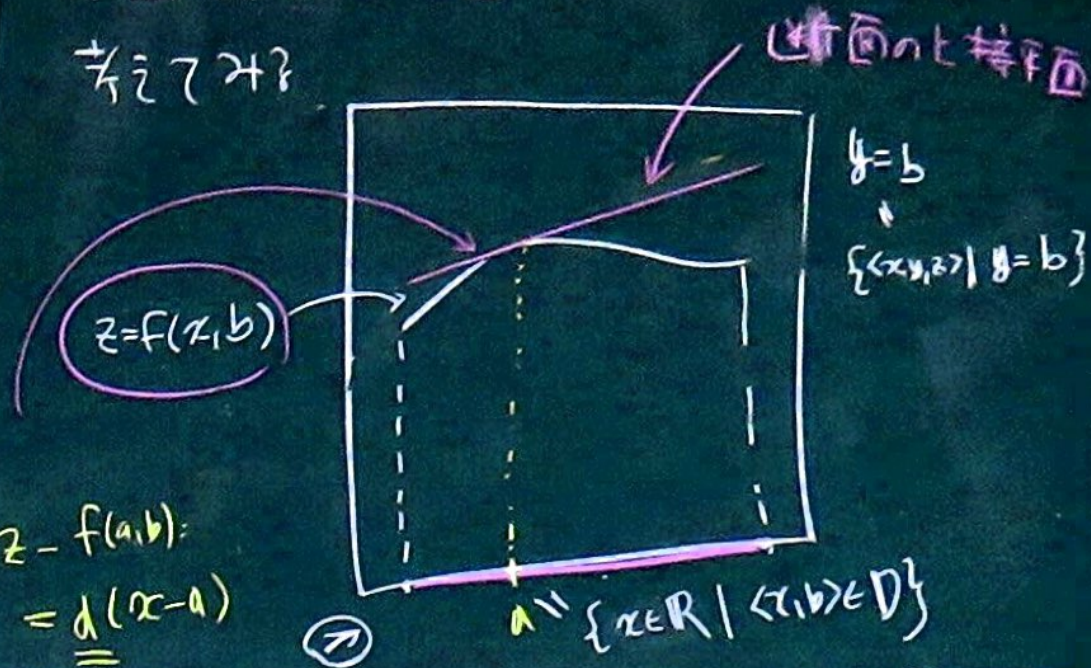
$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0) = f(a, b)$$

とほらふたつの

接平面



$y = b$ であるから xz -平面に平行な平面で左の図を切った断面を
考えてみる?



$$z = f(a, b) = d(x - a)$$

⑦ $z = f(x, y)$ の点 $(a, b, f(a, b))$
 の接平面は断面 $y=b$ 上で
 曲線 $z = f(x, b)$ の接線にならなければならない
 この接線の傾き係数 d は

$f(x, b)$ を x 関数として微分したときの
 a での値とならなければならない (ベキである).

$f(x, y)$ を y を固定して x の 1 変数関数と
 見て微分したもの d とを (微分可能な)

$f(x, y)$ の x -偏導関数 ^{へんどうかんすう} とする d を
 (x -partial derivative)

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_x(x, y)$$

などであらわす. この書き方を用いると左の傾き
 係数 d は $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=a, y=b}$ $f_x(a, b)$ などとして

書ける. (ただしこの接線 (= 接平面の $y=b$ との共通部)

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) \text{ などと表わされる.}$$

同様に yz -平面に平行な断面 $x=a$

を考えると、対応する接平面と曲面との
共通部分となる直線は曲線 $z=f(a, y)$
の接線になり、この傾き係数 d' は

$f(a, y)$ を y の関数と見たときの微分係数となる。
(a 定数)

前と同様に $f(a, y)$ を x の関数と見たとき y の関数と
して見れば、傾き係数を $\frac{\partial f}{\partial y} f_y(a, y)$ とかく

したがって $d' = f_y(a, b)$ となる

接線は

$$z - f(a, b) = f_y(a, b)(y - b)$$

となる。接平面が点 $\langle a, b, f(a, b) \rangle$ とおける点には、

接平面は平面 $z = f_x(a, b)x + f_y(a, b)y$ を

点 $\langle a, b, f(a, b) \rangle$ を中心として平行移動して得られる

平面なほすである。したがって

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

が接平面の方程式となる。

例 (4.9) (数値計算)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \langle x, y \rangle \mapsto x^2 + 2xy + 3y^2$$

$$f_x(x, y) = 2x + 2y$$

$$f_y(x, y) = 2x + 6y$$

とる。 $(z=f(x, y))$ の点 $(1, 2, 53)$ での接平面は、
(1.1.1)

$$f_x(1, 2) = 6$$

$$f_y(1, 2) = 16$$

とる。

$$1^2 + \underbrace{2 \cdot 1 \cdot 2}_4 + \underbrace{3 \cdot 2^2}_{12} = 53$$

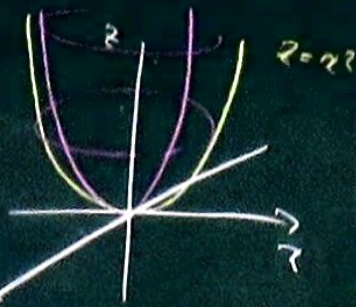
$$z - 53 = 6(x - 1) + 16(y - 2)$$

とあらわす。

1.1.1 の 根 形

$z = x^2 + 2xy + 3y^2$ と平面 $y=0$ と切ると $z = x^2$
(1.1.1) 平面 $x=0$ と切ると $z = 3y^2$ と切ると

平面 $z = a$ と切ると $a = x^2 + 2xy + 3y^2 \dots$



例1 (教科書例) 4.10)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \langle x, y \rangle \mapsto x^2 e^{xy}$$

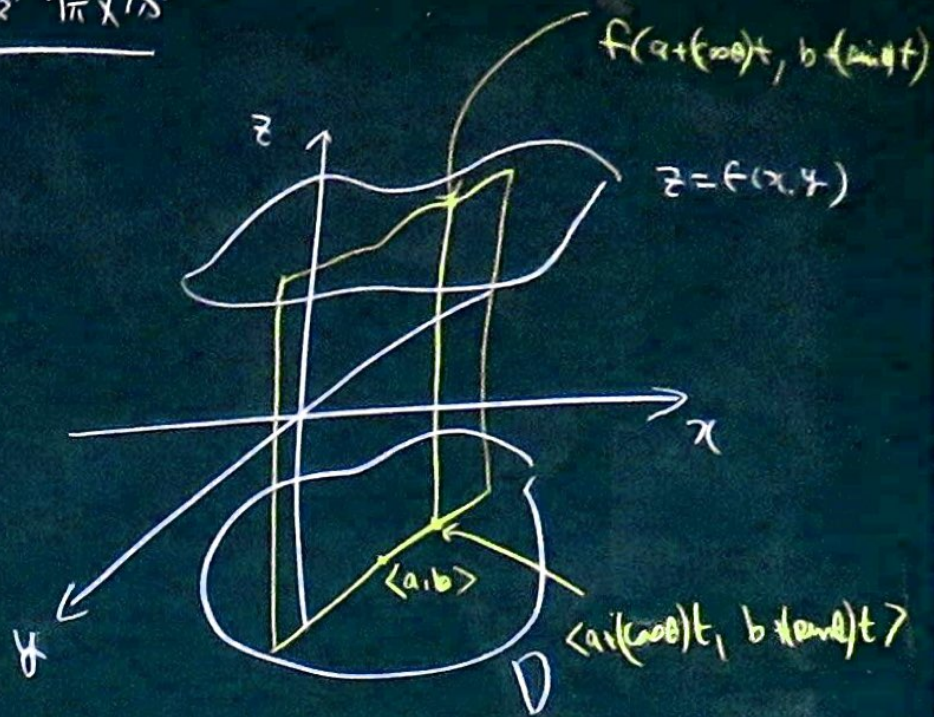
$$f_x(x, y) = 2x e^{xy} + y e^{xy}$$

$$f_y(x, y) = x^2 x e^{xy} \\ = x^3 e^{xy}$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

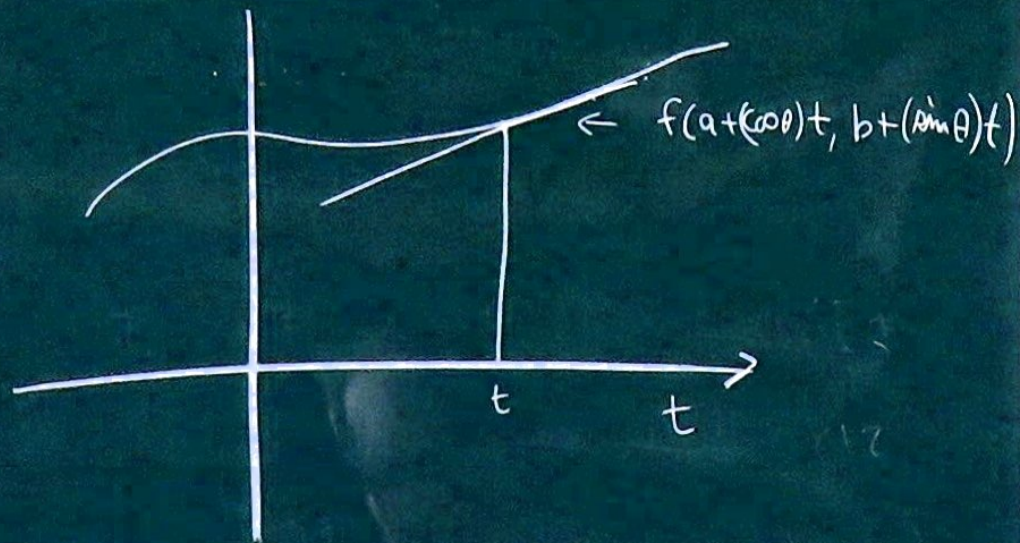
$$(e^x)' = e^x$$

方向微分





$$\left\{ \langle a + (\cos \theta)t, b + (\sin \theta)t \rangle \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$



$$\frac{d}{dt} f(a + (\cos \theta)t, b + (\sin \theta)t) =: d(t)$$

とすると $d(0)$ がこの曲線の $t=0$ の傾き
係数となる。後で見るように f が x -偏微分
 y -偏微分可能 のときは (教科書定理 4.6)

$$\begin{aligned} d(t) &= (\cos \theta)' f_x(a + (\cos \theta)t, b + (\sin \theta)t) \\ &\quad + (\sin \theta)' f_y(a + (\cos \theta)t, b + (\sin \theta)t) \end{aligned}$$

とすると

$$t=0, \quad t=0$$

$$d(0) = \cos \theta f_x(a, b) + \sin \theta f_y(a, b)$$

このことから 点 (a, b) の近傍で $f(x, y)$ が x -偏微分
 y -偏微分可能 な接平面が求まることがわかる。

この傾き係数は平面

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - a) \text{ 上で}$$

$(a, b, f(a, b))$ を通る xy -平面上に射影したとき

と表される直線の傾き係数と一致する。