補講（うりぼうネット参照）

7月19日(木) 6限目 この教室で演習を行う。

偏微分の順序の交換

$f: D \to \mathbb{R}$ について f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} が存在するとき（定義できる）
$D \subset \mathbb{R}^2$

$f_{xy} = f_{yx}$ か？

一般には＝は成り立たない！ しかし：

定理 4.1（教科書でも定理4.1）

$f: D \to \mathbb{R}$ について、f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}
$D \subset \mathbb{R}^2$

が定義できて、しかも f_{xy}, f_{yx} が連続なとき、（$\langle a,b\rangle$ の近傍 U で）

$f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

定理 4.2 (Schwartz)

$f: D \to \mathbb{R}$ について（$\langle a,b\rangle \in D$ として）、f_x, f_y が定義されていて f_{xy}, f_{yx} のどちらか片方が定義されていて（U で）しかも連続のとき（U で）、もう片方も定義され（$\langle a,b\rangle$ で）$f_{xy} = f_{yx}$ となる。

例 (教科書 例 4.2)

$f(x,y)=x^2-xy+y^2$ のとき このときには

f は何回でも偏微分できて $f_x\ f_y\ f_{xy}\ f_{yx}$ … はすべて連続

偏微分した結果も多項式であらわされるので

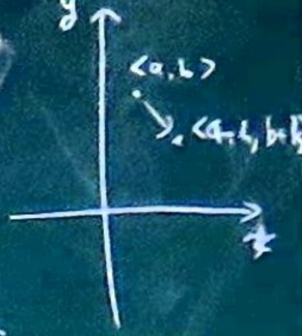
したがって定理 4.1 から $f_{xy}=f_{yx}$ であるはずである。実際

$f_x(x,y)=2x-y$ $\qquad f_{xy}=-1$

$f_y(x,y)=-x+2y$ $\qquad f_{yx}=-1$

復習 $f: D\to\mathbb{R}$ が $\langle a,b\rangle\in D$ で ($D\subset\mathbb{R}^2$)

全微分可能とは、ある $\langle\alpha,\beta\rangle\in\mathbb{R}^2$ が存在して、$\langle h,k\rangle\in\mathbb{R}^2$ に対して、



(*)

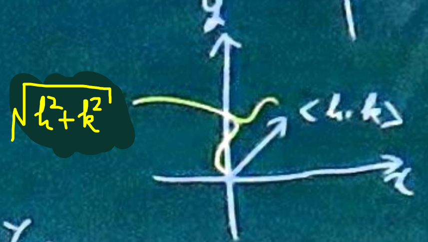
$$\varepsilon_{\langle a,b\rangle}(h,k) = \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-(\alpha h+\beta k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおくと

(**)

$$\lim_{\langle h,k\rangle\to\langle 0,0\rangle}\varepsilon_{\langle a,b\rangle}(h,k)=0$$

となること。



定理 4.3 $f(x,y)$ が $\langle a,b\rangle$ で全微分可能なら、$f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ が存在して、α, β を全微分可能性の定義でのようにとると、

$f_x(a,b)=\alpha \quad f_y(a,b)=\beta$ となる！

証明 (*) で両辺に $\sqrt{h^2+k^2}$ をかけて移項すると、

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\alpha h+\beta k+\varepsilon_{\langle a,b\rangle}(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

ここで たとえば $k=0$ として両辺を h でわると、

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\alpha+\frac{|h|}{h}\varepsilon_{\langle a,b\rangle}(h,0)$$

となるので両辺の $\lim_{h\to 0}$ をとると、

$$\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}}_{f_x(a,b)}=\underbrace{\underbrace{\lim_{h\to 0}\alpha}_{\alpha}+\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}\underbrace{\varepsilon_{\langle a,b\rangle}(h,0)}_{\to 0\ \text{((**)による)}}}_{0}}_{\alpha}$$

となるから $f_x(a,b)$ は定義されていることがわかる。

$h=0$ とおいて同様に議論すると

$f_y(a,b)$ も存在することがわかる！

定理 4.4 $f: D \to \mathbb{R}$ が $\langle a,b\rangle$ で全微分可能ならば, f は $\langle a,b\rangle$ で連続である. （教科書 定理 4.3）

($D \subset \mathbb{R}^2$)

証明のスケッチ (**) から, 十分に小さな $\delta_0>0$ をとると, すべての $\langle h,k\rangle \in U_{\delta_0}(\langle 0,0\rangle)$

$$U_{\delta_0}(\langle 0,0\rangle) = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid d(\langle x,y\rangle,\langle 0,0\rangle) = \sqrt{x^2+y^2} < \delta_0\}$$

に対して,

$$\left|\varepsilon_{\langle a,b\rangle}(h,k)\right| < 1$$

となるようにできる.

したがって, 任意の $\varepsilon>0$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot\min\{\delta_0,\ \varepsilon,\ 1\} \quad \cdots (?)$$

とすると任意の $\langle x,y\rangle \in U_\delta(\langle a,b\rangle)$ に対して,

$$\left|f(x,y)-f(a,b)\right| < \varepsilon$$

とできることが (*) から示せる. ☒

注意 $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ が存在するとしても f が $\langle a,b\rangle$ で連続とは限らない.

定理 4.5 （教科書定理 4.5） $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ について f_x, f_y が $\langle a,b\rangle$ のある近傍で定義され連続なら, f は $\langle a,b\rangle$ で全微分可能である

補講（ごりぼうネット参照）

7月19日（木）6限目この教室で演習を行う.

定理4.6（前回の定理3.1の改良）

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ が, $\langle a,b\rangle$ で偏微分可能で（$D \subset \mathbb{R}^2$）

(i.e. $f_x(a,b)$ $f_y(a,b)$ が存在して) f_x か f_y の少くとも どちらか片方が $\langle a,b\rangle$ のある近傍で定義でき連続とする

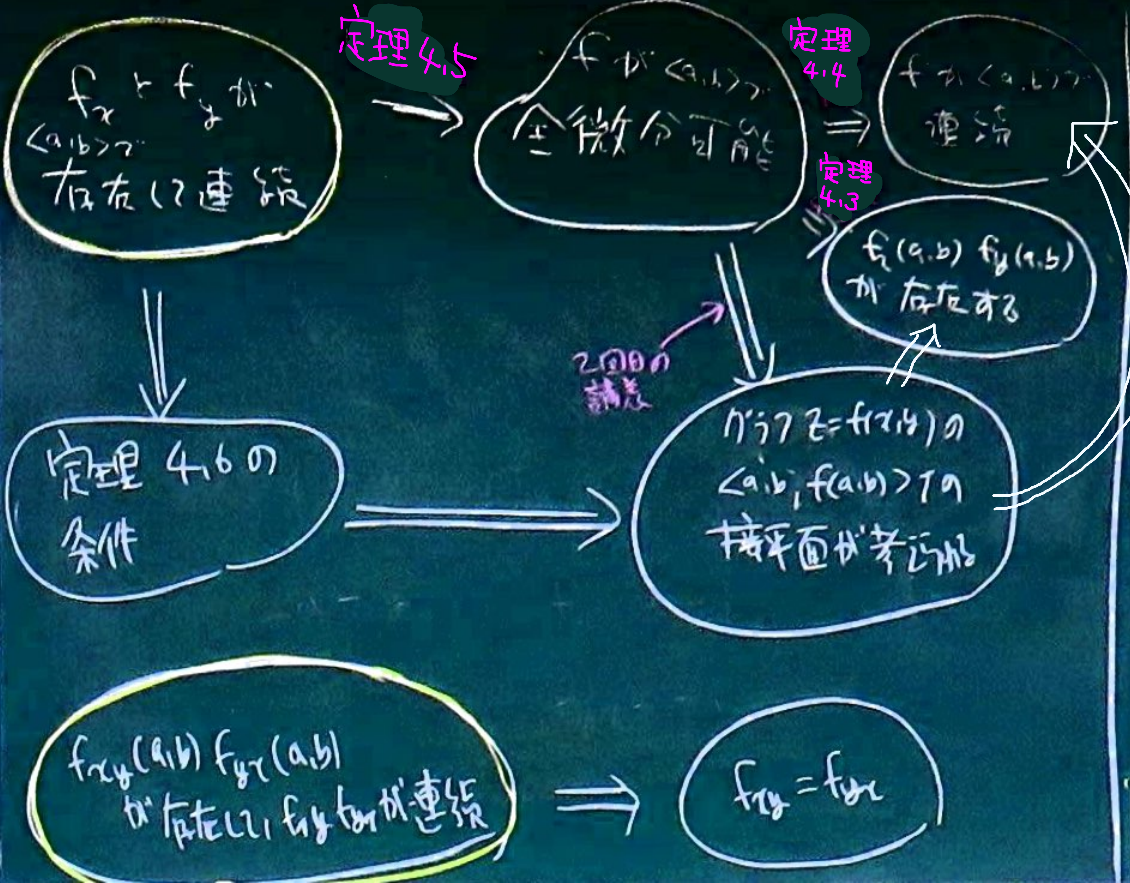
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を微分可能で $\varphi(\alpha)=a$ $\psi(\alpha)=b$

とすると,

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t))\Big|_{t=\alpha} = \varphi'(\alpha) f_x(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) + \psi'(\alpha) f_y(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) \quad (***)$$

となる.

定理4.6の式 (***) が成り立つなら $\langle a,b\rangle$ での接平面が考えられるのだった.



左図での ⇒ はすべて非可逆である
irreversible
(i.e. ⇐ はすべて成り立たない)

f_x　f_y が ⟨a,b⟩ の近傍で存在して連続なとき f は ⟨a,b⟩ で C_1-級であるという。

f が⟨a,b⟩の近傍で何回でも偏微分可能なとき f は⟨a,b⟩で C_∞-級であるという