

今日 6月2日 演習

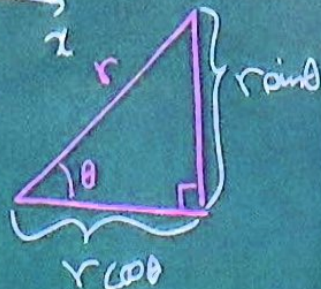
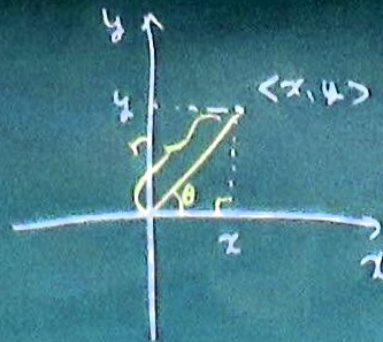
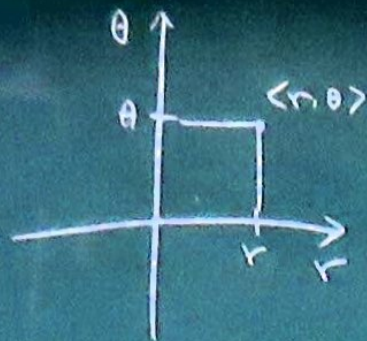
期末テストに於けるこの演習の問題の類題：
ネットアップ である予定の補足の予想問題の
類題をあげる。

合成関数の微分法の復習。

$f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が (t, s) 全微分可能
(C_1 -級関数) で $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が微分可能
の時、

$$(*) \frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) = \varphi'(t) f_x(\varphi(t), \psi(t)) + \psi'(t) f_y(\varphi(t), \psi(t))$$

応用例：極座標表示
 $\mathbb{R}^2$ の点の



$$\langle r, \theta \rangle \longmapsto \langle r \cos \theta, r \sin \theta \rangle$$

$0, \theta$ は 2π $\langle 0, 0 \rangle$ に対応する。

$$\phi(u, v), \psi(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

ここで ϕ, ψ が偏微分可能なとき (*) より,

$$\frac{\partial}{\partial u} f(\phi(u, v), \psi(u, v))$$

$$= \phi_u(u, v) f_x(\phi(u, v), \psi(u, v)) + \psi_u(u, v) f_y(\phi(u, v), \psi(u, v))$$

$$\frac{\partial}{\partial v} f(\phi(u, v), \psi(u, v))$$

$$= \phi_v(u, v) f_x(\phi(u, v), \psi(u, v)) + \psi_v(u, v) f_y(\phi(u, v), \psi(u, v))$$

$$\{f_x, f_y\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$= \cos \theta f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta f_y(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$= -r \sin \theta f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta f_y(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Taylor の定理

f が C^n 級
(n 回微分可能)
の結果が導出)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-a)^{n-1}$$

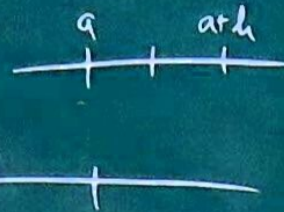
と仮定する。 a と x の間にある ξ をとれる。
 (2.1 は仮定)

$$x = a + h \text{ とおくと,}$$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2$$

$$+ \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} h^{n-1}$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!} h^n$$



と仮定する。 $0 \leq \theta \leq 1$ とする

(θ は h による点か定数か)

$\gamma_1 = \gamma_2$ $a=0$ とおくと (McLaurin)

(**)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

とある $0 \leq \theta \leq 1$ がわかる

n 回偏微分可能 (偏微分の結果が連続となる) かつ

$f(a,b): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられると

$f(a+h, b+k)$ の値に近づく Taylor の定理を
 2変数の場合: $(*)$ を用いて

$$z(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto f(a+ht, b+kt)$$

と考える. $z(1) = f(a+h, b+k)$ とある (***) から

$$z(t) = \underbrace{z(0)}_{f(a,b)} + \frac{z'(0)}{1!}t + \frac{z''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{z^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{z^{(n)}(\theta t)}{n!}t^n \quad (0 \leq \theta \leq 1 \text{ とある})$$

$t=1$ のとき $z(1) = f(a+h, b+k)$ であるから

$$= f(a,b) + \frac{z'(0)}{1!} + \frac{z''(0)}{2!} + \dots + \frac{z^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{z^{(n)}(\theta)}{n!}$$

今日 6月2日 演習

期末テストはこの演習の問題の類題：
ネットアップで予定の補足の予想問題の
類題を出す。

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{d}{dt} f(a+ht, b+kt) \\ &= hf_x(a+ht, b+kt) + kf_y(a+ht, b+kt) \end{aligned}$$

さらに

$$z'(0) = hf_x(a, b) + kf_y(a, b)$$

$$z''(t) = h^2 f_{xx}(a+ht, b+kt)$$

$$\begin{aligned} &+ hk f_{xy}(a+ht, b+kt) \\ &+ kh f_{yx}(a+ht, b+kt) \\ &+ k^2 f_{yy}(a+ht, b+kt) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{偏微分の順序の} \\ \text{交換の定理 4.1} \\ \downarrow \\ = 2hk \\ f_{xy}(a+ht, b+kt) \end{array}$$

$$z''(0) = h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b)$$

とすると、

(***) (二変数関数に於ける Taylor の定理)

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) +$$

$$f_x(a, b)h + f_y(a, b)k +$$

$$\frac{1}{2} f_{xx}(a, b)h^2 + \frac{2}{2} f_{xy}(a, b)hk + \frac{1}{2} f_{yy}(a, b)k^2$$

$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}$$

補題 5.1

$$z(t) = f(a+ht, b+kt) \quad \text{と置く}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} z(t) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y) \Big|_{\substack{x=a+ht \\ y=b+kt}}$$

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \text{ etc.}$$

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n = {}_nC_n h^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} + {}_nC_{n-1} h^{n-1} k \frac{\partial^n}{\partial x^{n-1} \partial y}$$

$$+ {}_nC_{n-2} h^{n-2} k^2 \frac{\partial^n}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \dots + {}_nC_1 h^1 k^{n-1} \frac{\partial^n}{\partial x \partial y^{n-1}} + {}_nC_0 \frac{\partial^n}{\partial y^n}$$

証明は $n=1$ のとき帰納法で示す

$n=1$ $n=2$ のときはすでに示している。 $\square$

例 $f(x, y) = e^{x+y}$ とする

$e^{0+0} = 1$ となる $(****)$ を用いて

----- (練習)

$(***)$ で $a=b=0$ $h=x$, $k=y$ とおくと,

$(****)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2} f_{yy}(0, 0)y^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} f_{xxx}(0, 0)x^3 + \frac{1}{2} f_{xxy}(0, 0)x^2y + \frac{1}{2} f_{xyy}(0, 0)xy^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} f_{yyy}(0, 0)y^3 + \end{aligned}$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$