$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して、

$\begin{array}{c} D \\ \cap \\ \mathbb{R}^2 \end{array}$

$\langle a, b\rangle \in D$ に対して、

f が $\langle a, b\rangle$ で 極大 / 極小 であるとは、

ある十分に小さな $\varepsilon > 0$ に対して

すべての $\langle x, y\rangle \in U_\varepsilon(a,b) \cap D$ で

$\langle x, y\rangle \neq \langle a, b\rangle$ なものに対して、

$f(x,y) < f(a,b)$

$f(x,y) > f(a,b)$

が成り立つこととする

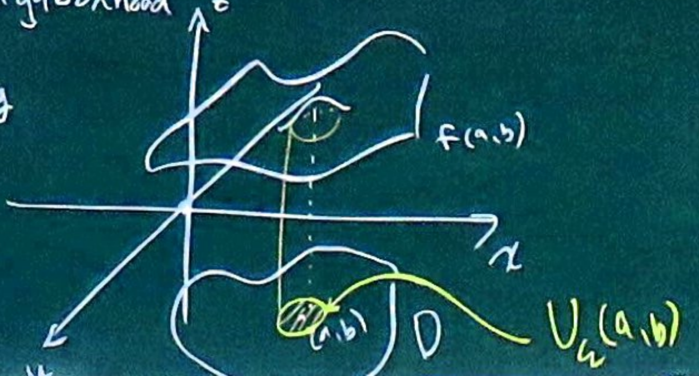
$$U_\varepsilon(a,b) = \{ \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{d(\langle x,y\rangle, \langle a,b\rangle)}_{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} < \varepsilon \}$$

↑

$\langle a, b\rangle$ の ε-近傍（きんぼう） (nbhd)

neighborhood

独 Umgebung



f が (a,b) で 極大値をとる
　　　　　　　極小値

このどちらかが成り立っているとき、
f は (a,b) の極値をとる、という

$f(x,y) \leq f(a,b)$
$f(x,y) \geq f(a,b)$ が (a,b) の近傍で成り立つとき、
f は (a,b) で広義に 極大
　　　　　　　　　　極小 であるという。

定理 6.1 (教科書 4.1)

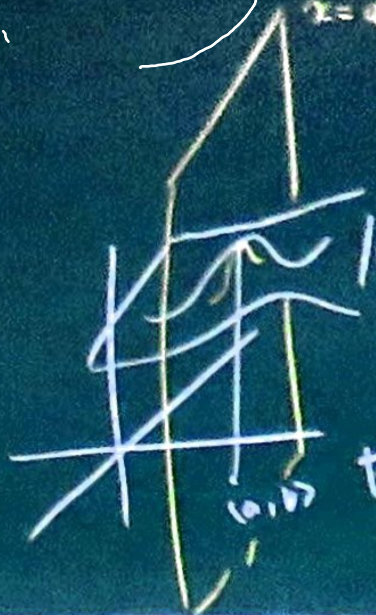
f が (a,b) で偏微分可能で
(f の定義域 D の内点、)
(a,b) で極値をとるときには、

$f_x(a,b)=0$

$f_y(a,b)=0$

となる。対偶をとると、

$f_x(a,b)\neq 0$ または $f_y(a,b)\neq 0$ ならば f は (a,b) で極値をとらない。



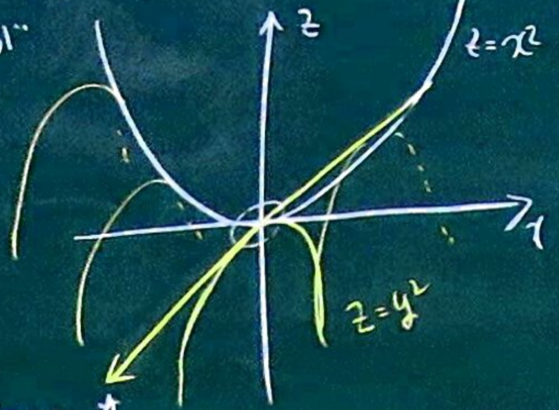
$f_x(a,b)=0$　$f_y(a,b)=0$ だとしても一般には

f は $\langle a,b\rangle$ で極値をとるとは限らない

例　$f(x,y)=x^2-y^2$ とすると

$f_x(x,y)=2x$　$f_y(x,y)=2y$ なので $f_x(0,0)=0$

$f_y(0,0)=0$ だが



鞍点（あんてん）

となっているので f は

$\langle 0,0\rangle$ で極値をとらない

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ が D で C_2-級のとき,
$D \subset \mathbb{R}^2$
↑このとき $f_{xy}=f_{yx}$ が成り立つ

$$\det H(x,y) = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2$$

（ヘッセ行列の行列式）

とする.

定理 6.2（教科書 4.10）$f: D \to \mathbb{R}$ が（$D \subset \mathbb{R}^2$）

C_3-級のとき, $\langle a,b\rangle \in D$ で $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$

のとき

(1) $\det H(a,b) > 0$ のとき

(a) $f_{xx}(a,b) > 0$ なら f は (a,b) で極小値をとる

(b) $f_{xx}(a,b) < 0$ なら f は (a,b) で極大値をとる.

(2) $\det H(a,b) < 0$ このときには f は (a,b) で極値をとらない。

(3) その他の場合には、不定
（これだけでは何ともいえない）

<u>例</u>（定理6.1 6.2の応用例：教科書例題4.12）

$f(x,y) = x^3+3x^2+3y^2-6y+1$ の極値をしらべる。

$f_x(x,y) = 3x^2+6x = 3x(x+2)$

$f_y(x,y) = 6y-6$

だから $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x(x+2)=0 \\ 6y-6=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0,\ -2 \\ y=1 \end{cases}$

となるので $(0,1)$ と $(-2,0)$ が f が極値をとる点の候補となる。ここで定理6.2を用いる。

$f_{xx}(x,y) = 6x+6$

$f_{yy}(x,y) = 6$

$f_{xy} = 0$

$\det H(x,y) = 6(6x+6)$

$\det H(0,1) = 36$

$\det H(-2,0) = -36$

となるので定理6.2 (2) から $(-2,0)$ では f は極値をとらない

定理6.2 (1) から $(0,1)$ では $f_{xx}(0,1) = 6 > 0$ により f は極小値をとる。したがって f が極値をとる点は $(0,1)$ のみで、ここでは、f は極小値をとる。

定理6.2の証明のスケッチ

前回のTaylorの定理を思い出すと

$$f(a+h,\ b+k) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left(\overset{=0}{f_x(a,b)}\,h + \overset{=0}{f_y(a,b)}\,k\right) + \underbrace{\frac{1}{2!}\left(f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2\right)} + \underline{R}$$

$\langle a+h, b+k\rangle \to \langle a,b\rangle$ のとき R は h と k の3次の式なので

R の絶対値は $\underline{\qquad}$ の絶対値とくらべて小さい

つまり $\langle h,k\rangle$ が十分に $\langle 0,0\rangle$ に近いときには

$$f(a+h,\ a+k) \fallingdotseq \overbrace{f(a,b)}^{\delta} + \underbrace{\frac{1}{2!}\Big(\underbrace{f_{xx}(a,b)}_{\alpha}h^2 + 2\underbrace{f_{xy}(a,b)}_{\beta}hk + \underbrace{f_{yy}(a,b)}_{\gamma}k^2\Big)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\alpha h^2 + \beta hk + \gamma k^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\underbrace{\left(h + \frac{\beta}{\alpha}k\right)^2}_{\geq 0} + \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{2\alpha}\underbrace{k^2}_{\geq 0}$$

$$\alpha\gamma - \beta^2 = \det H(a,b)$$

$\det H(a,b) > 0$ のときは $\underline{\qquad}$ は α と同じ符号(になる)

したがってこのときには $a = f_{xx}(a,b) > 0$
なら、$f(a+h, b+k) > f(a,b)$ が a, b の十分
小さな $\varepsilon > 0$ に対する近傍で成り立つ。つまりこのときには
f は (a,b) で極小値をとる。
同様に $a = f_{xx}(a,b) < 0$ なら
f は (a,b) で極大値をとる
$\det(H(a,b)) < 0$ のときには、(a,b) のどんな十分
小さな近傍でも $\boxed{\quad\quad\quad}$ の値はプラスにもマイナスにも
なりうるので f は (a,b) で極値をとらない。 ☒

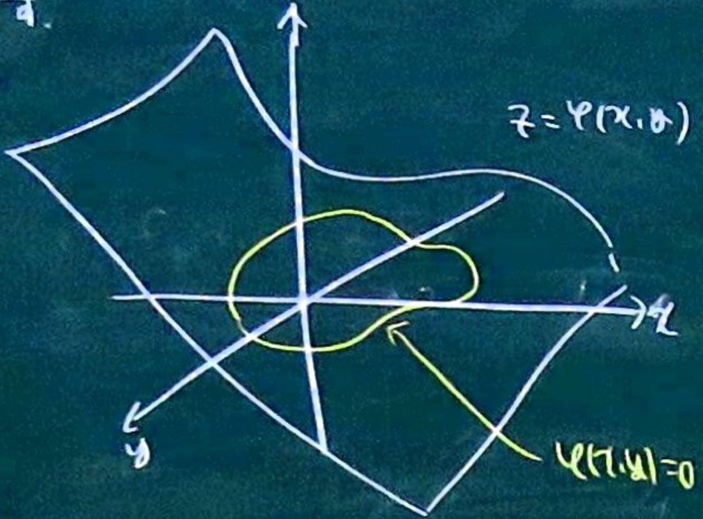
定理 6.3 (Lagrange の未定乗数法)

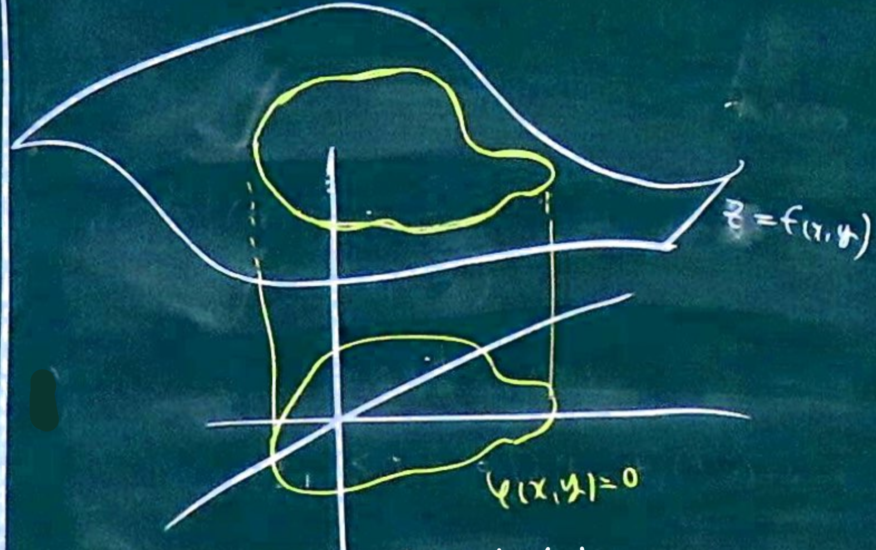
$$\left.\begin{array}{l} \text{関数 } f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi : D \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}\right\}$$ を C^1 級とする　($D \subset \mathbb{R}^2$)

ただし $\varphi(x,y) = 0$ を満たすすべての $(x,y) \in D$
で $\varphi_x(x,y) \neq 0$ または $\varphi_y(x,y) \neq 0$ が常に成り立つとする
このとき、$\varphi(x,y) = 0$ を満たすような D の点で
$f(x,y)$ が(広義の)極値をとる点は、
$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y)$ とおく
Lagrangian

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

を満たす.





参考文献

— 教科書

--- 渕野昌, 初等数学ノート,
1.13陰関数定理とラグランジュの未定常数法
http://fuchino.ddo.jp/notes/math-notes-elementary.pdf