

不定積分 3/4

<http://fuchino.ddo.jp/kobe/>

(「講義のweb page」今はまだ「工事中」)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

不定積分

数 real number

関数: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

function $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\checkmark$ F の微分

f に対して関数 F 若 $F'(x) = f(x)$

$F'(x)$ は $\frac{d}{dx} F(x)$ と書く。

となるとき, F を f の原始関数という

(antiderivative)

$x=r$

例 $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$

のとき, $F(x) = 2\cos(\frac{1}{2}x)$ は f の原始関数の一つ

$F_1(x) = 2\cos(\frac{1}{2}x) + 376$ も f の原始関数。

与えられた関数 f の原始関数(の1つ)を求め

操作を不定積分とよぶ。

定数: constant

定理 (基本微分定理の応用)

$G(x)$? $G'(x) = 0$ のとき G の定義域に含める

x に対して成り立つときには, $G(x)$ は定数値関数になる。

今, $F(x)$ と $F_1(x)$ は両方とも $f(x)$ の原始関数であると,

$$(F - F_1)'(x) = F'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

となれば, $F - F_1$ は定数値関数である。その値を C

とすると, $F(x) - F_1(x) = C$ つまり, $F(x) = F_1(x) + C$

となる。したがって f の原始関数の1つを F とすると

$\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ が f の原始関数の全体である。

を $\int f(x) dx$ と書く。

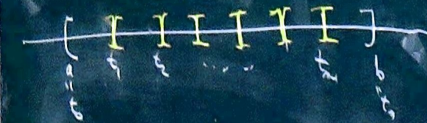
このことを " $\int f(x) dx = F(x) + C$ " とあらわすことがある。

$\int$ は $\sum$ みたいな記号

$\sum$ (和) $\int$ (積分)

定積分

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を考える区間 $[a, b]$ の分割 (partition) を考える

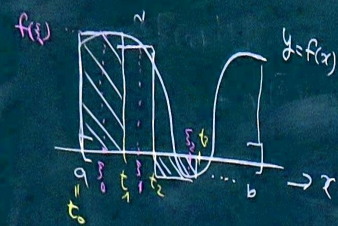


$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

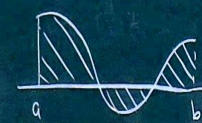
$$P = \{[t_k, t_{k+1}] \mid 0 \leq k < n\}$$

今、 $t_k \leq s \leq t_{k+1}$ となる点を任意にとり、 $f(s_k)$ と書くことにする

和 $S_{P,f} = \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)(t_{k+1} - t_k)$ を考える



これは、関数のグラフと x 軸ではさまれた領域の面積の近似になっていると考えてよい。



ただし $f(x) < 0$ となる部分では負の面積をとるものとする。

分割 $P = \{[t_k, t_{k+1}] \mid k < n\}$ に対し、

$$|P| = \max \{t_{k+1} - t_k \mid k < n\}$$

↑
分割の粗さ

今 $|P| \rightarrow 0$ としたときに P に対応する任意 ξ に対して

$S_{P,f} \rightarrow A$ となるとき、この値 A を $f(x)$ の a から b までの定積分と書く。これを $A = \int_a^b f(x) dx$ と書く。

定理 1 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続関数かつ f には

$$\int_a^b f(x) dx$$

よって f は連続関数 (ただし、(a, b) 区間の連続関数

"一様連続" には注意を要する)

例 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ が有理数のとき} \\ 1 & x \text{ が無理数のとき} \end{cases}$$

とすると任意 $[0, 1]$ の分割に対して $S_{P,f} = 0$ と $S_{P,f} = 1$ となるので $\int_0^1 f(x) dx$ は存在しない。

補題2

(1) $\int_a^b f(x)dx$ が存在する $\Rightarrow$ $a < c < d < b$ ならば

$\int_c^d f(x)dx$ が存在する

(2) $a < b < c$ ならば $\int_a^c f(x)dx$ が存在する

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

証明の工夫 (1): 分割 P で c と d が端点となるようにその λ を与えよう。

(2):



$P_1 \cup P_2 = P$ となるように

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} S_P = \lim_{|P| \rightarrow 0} (S_{P_1} + S_{P_2})$$

$$= \lim_{|P_1| \rightarrow 0} S_{P_1} + \lim_{|P_2| \rightarrow 0} S_{P_2} = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

補題3 $f(x)$ が連続のとき

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x)dx = f(a) \text{ となる}$$

証明 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で $x \in (a, a+\delta)$ のとき

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ となるものがある. (連続性より)}$$

このとき, 任意の $[a, a+h]$ の分割 P に対し,



$$|S_P - f(a) \cdot h| < \varepsilon h \text{ 両辺を } h \text{ で割ると}$$

$$\left| \frac{1}{h} S_P - f(a) \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x)dx$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x)dx = f(a) \text{ となる}$$

定理 (微分積分学の基本定理) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ となる

f が連続関数とあるとき, f の原始関数が存在する

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ となる}$$

定理4の証明:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $u \in [a, b]$ に対し

$F(u) = \int_a^u f(x) dx$ と定義する.

定理1により F の定義は可能!

$$\begin{aligned} \underline{F'(u)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(u+h) - F(u)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{u+h} f(x) dx - \int_a^u f(x) dx}{h} \end{aligned}$$

$$\uparrow \quad = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_u^{u+h} f(x) dx}{h}$$

補題

2

補題3

$f(u)$ は $f(u)$ の原始関数の1つである.

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \text{ なる}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^u f(x) dx + \int_u^b f(x) dx = F(u) - F(a) + F(b) - F(u) = F(b) - F(a) \text{ なる.}$$

□

F^* を f の任意の原始関数とすると、定数 C で

$F^*(u) = F(u) + C$ となるものがとれる. したがって、2

$$\begin{aligned} F^*(b) - F^*(a) &= (F(b) + C) - (F(a) + C) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

である.