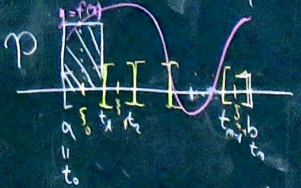


介値定理と補題

P は $[a, b]$ の分割 (partition)



$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

ξ_k を分割の各区間のどこか一つと、 t_k の

$$S_{P, f} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(t_{k+1} - t_k)$$

とす。

$|P| \rightarrow 0$ としたとき $S_{P, f} \rightarrow s$
 となるとき、この値 s を f の a から b への定積分
 とし、これを $\int_a^b f(x) dx$ と表す。

注意 $\int_a^b f(t) dt$ $\int_a^b f(u) du$ などと書いても同じ

定理 4 (微分積分学の基本定理)
 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 連続関数とすると、
 $F(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \int_a^x f(u) du$ は
 f の原始関数の一つとなり、 $\int_a^b f(u) du = F(b) - F(a)$

$F(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が
 $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$ となるとき $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数 (不定積分) とす

定理 1 連続関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対し

定積分 $\int_a^b f(x) dx$ が存在する

注意 F_0 を f の任意の原始関数とすると、ある定数
 C に対し $F_c(x) = F_0(x) + C$ と表わせるが、

$$\int_a^b f(u) du = F(b) - F(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F_0(b) - F_0(a) \text{ と成す}$$

F を連続関数 f の原始関数とすると、
 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ と計算できる

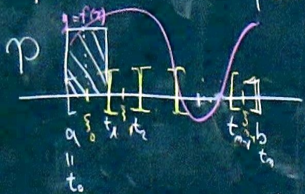
例 $(\sin(x^2))' = 2x \cos(x^2)$
 したがって $\int_1^2 2x \cos(x^2) dx = \sin(2^2) - \sin(1^2) = \sin 4 - \sin 1$

補題 5 f を閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数
 とすると f の区間 $[a, b]$ での最大値・最小値が
 存在する (微分積分学 1)

注意 f が閉区間上の関数であることは重要:
 たとえば $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto \frac{1}{x}$ とすると、 f は連続だが
 f は最大値を持たない。

分割と近似

P は $[a, b]$ の分割 (partition)



$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

ξ_k を分割の中の各区間のどこか一つと、 t_k の

$$S_{P, \xi}^f = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(t_{k+1} - t_k)$$

とす。

f を連続関数とすると

$$S_{P, M}^f = \sum_{k=0}^{n-1} \max \{f(s) \mid s \in [t_k, t_{k+1}]\} (t_{k+1} - t_k)$$

M : maximum

$$S_{P, m}^f = \sum_{k=0}^{n-1} \min \{f(s) \mid s \in [t_k, t_{k+1}]\} (t_{k+1} - t_k)$$

m : minimum

とすると、任意の ξ に対して

$$S_{P, m}^f \leq S_{P, \xi}^f \leq S_{P, M}^f$$

となる。ある分割 P_0 を固定すると

$$\{S_{P, m}^f \mid P \text{ は分割}\} \leq S_{P_0, M}^f \text{ となる。}$$

命題 6

$\mathbb{R}$ の上に有界な部分集合は最小上界を持つ

$\mathbb{R}$ の下に有界な部分集合は最大下界を持つ

(実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ の基本性質の一つ)

命題 6 bis

$$m = \sup \{S_{P, m}^f \mid P \text{ は分割}\} = \lim_{|P| \rightarrow 0} S_{P, m}^f$$

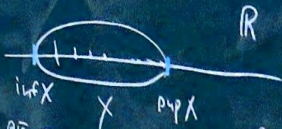
$$M = \inf \{S_{P, M}^f \mid P \text{ は分割}\} = \lim_{|P| \rightarrow 0} S_{P, M}^f$$

$$\text{となり } m \leq M$$

$X \subseteq \mathbb{R}$ のとき

$\sup X$ = 実数 a として $x \in X$ に対して $x \leq a$ となる最大の $(X \text{ の上界})$ のこと

$\inf X$ = 実数 a として $x \in X$ に対して $a \leq x$ となる最大の $(X \text{ の下界})$ のこと



補題 7

$$m = M \text{ ならば } \lim_{|P| \rightarrow 0} S_{P, \xi}^f = m = M$$

となる。

補題8 閉区間上の関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が

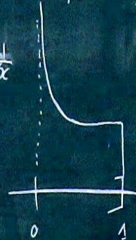
連続で、 f は一様連続である。つまり、
 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を選べば、
 任意の $x_0, x_1 \in [a, b]$ に対して $|x_0 - x_1| < \delta$ ならば
 $|f(x_0) - f(x_1)| < \varepsilon$ となる。

注意 逆に、 f が閉区間上の関数であることは必要

$$f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$$

と仮

定すると、 f に対しては $\varepsilon > 0$ に対
 して δ のような $\delta > 0$ は
 存在しない。



任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$x_0, x_1 \in [a, b] \text{ で } |x_0 - x_1| < \delta \text{ ならば } |f(x_0) - f(x_1)| < \varepsilon$$

と仮定する。分割 P が $|P| < \delta$

とすると、 P の各区間の最大値と最小値の差は ε より小さい。
 $\xi^M = \{\xi_1^M, \dots, \xi_{n-1}^M\}$ $\xi^m = \{\xi_1^m, \dots, \xi_{n-1}^m\}$

$$S_{P,M}^f - S_{P,m}^f$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^M)(t_{k+1} - t_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^m)(t_{k+1} - t_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(f(\xi_k^M) - f(\xi_k^m))}_{\leq \varepsilon} (t_{k+1} - t_k) < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) = \varepsilon(b-a)$$

と仮定

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} (S_{P,M}^f - S_{P,m}^f) = 0$$

//

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} S_{P,M}^f - \lim_{|P| \rightarrow 0} S_{P,m}^f \Rightarrow M = m$$

//

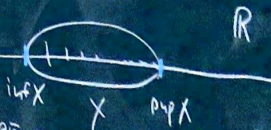
と仮定。これは補題7を適用すると

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} S_P^f \text{ が存在する (つまり定積分 } \int_a^b f(x) dx \text{ が存在する)}$$

$X \subseteq \mathbb{R}$ のとき

$\sup X =$ 実数 a であり、 a は $x \in X$ に対して $x \leq a$ となる最大の数 (Xの上界) のうち最大のものを指す。

$\inf X =$ 実数 a であり、 a は $x \in X$ に対して $a \leq x$ となる最大の数 (Xの下界) のうち最大のものを指す。



補題7

$$m = M \text{ ならば } \lim_{|P| \rightarrow 0} S_{P,M}^f = m = M$$

と仮定。

積分計算の例 f, g も連続関数として

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \text{ とする}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(g(x)) &= g'(x) F'(g(x)) \quad (\text{合成関数の微分法}) \\ &= g'(x) f(g(x)) \end{aligned}$$

つまり, $F(g(x))$ は $g'(x)f(g(x))$ の原始関数である。

$$\begin{aligned} \text{特例} \quad \int_a^b g'(x) f(g(x)) dx &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= [F(t)]_{g(a)}^{g(b)} \end{aligned}$$

753.

$$\int_a^b x \sqrt{x^2+1} dx \quad (x^2+1)' = 2x$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_a^b 2x \sqrt{x^2+1} dx \\ &\quad \uparrow \quad x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} (x^{\frac{3}{2}})' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_a^b (x^2+1)' \sqrt{x^2+1} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_{t=a^2+1}^{t=b^2+1} = \dots \end{aligned}$$

$$(*) \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_a^b c f(x) dx &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_{P, \frac{1}{3}}^{cf} \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} c f(\xi_k) (t_{k+1} - t_k) \\ &= c \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (t_{k+1} - t_k) \\ &= c \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_{P, \frac{1}{3}}^f = c \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$