

<http://fuchino.ddo.jp/home/>

<http://fuchino.ddo.jp/notes/math-notes-elementary.pdf>

定理 4.1 ^{Riemann} 積分可能な関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

に対し, $|f|: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |f(x)|$ も

積分可能で, $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

が成り立つ.

$P = \{x_0, \dots, x_n\}$

証明 $|f|$ が積分可能であることの証明は別々.
(*) P は $[a, b]$ の分割と見做す. P は各区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, f の最大値と

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |f(\xi_i)| (x_{i+1} - x_i) \\ &= \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |f(\xi_i)| (x_{i+1} - x_i) \\ &= \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)| dx \geq \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

補題 4.2 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が積分可能ならば,

(1) $0 \leq f(x)$ かつある $x \in [a, b]$ で $f(x) > 0$ ならば $\int_a^b f(x) dx > 0$ である.

(2) $0 \leq f(x) \leq g(x)$ かつ $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が積分可能ならば $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ である.

(3) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が有界ならば (つまり, ある $c > 0$ で $|f(x)| < c$ となる $x \in [a, b]$ が存在する) 積分可能である.

(2) の $I(u)$ は連続関数である.

定理 (1): $\int_a^b f(x) dx, \int_a^b g(x) dx$ は f, g が連続ならば $\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

(2): $a \leq x_0 < x_1 \leq b$ ならば $I(x_1) - I(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$

(3): 連続 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ならば f は有界で積分可能である.

c を f の上界とすると $|f(x)| \leq c$ となる $x \in [a, b]$ が存在する. $\epsilon = \frac{\epsilon}{c}$ とすると, 任意の $x \in [a, b]$ に対して $|f(x) - 0| \leq \epsilon$

広義積分 (improper integral) $b = \infty$ の場合も扱う

$f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ が任意の $a < y < b$ に対し、

$[a, y]$ 上の関数と見ると積分可能で、

$$S = \lim_{u \rightarrow b^-} \int_a^u f(x) dx \text{ が存在するとき, この値 (}\pm\infty\text{ も含む) を } S = \int_a^b f(x) dx \text{ とし, この}$$

値を $f(x)$ の $[a, b]$ での広義積分とよぶ。

補題 4.2 (3) 4.5, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が積分可能

⑦ 仮し, f を $[a, b)$ での関数とみなし, f の $[a, b]$ での広義積分を考えると,

$$\lim_{u \rightarrow b^-} \int_a^u f(x) dx = \lim_{u \rightarrow b^-} I(u) = I(b) = \int_a^b f(x) dx$$

補題 4.2 (3)

と(2), f の通常の積分の値と一致する!

広義積分はこの意味で 通常の積分の自然な拡張である。

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ の広義積分として広義積分を

$$S = \lim_{a \rightarrow a^+} \int_a^b f(x) dx \text{ で定義する。}$$

例 (1) $u > 1$ とし,

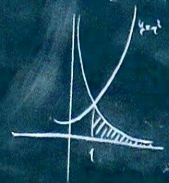
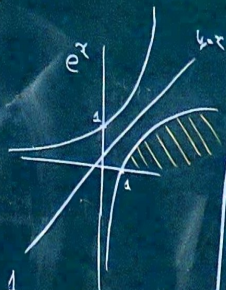
$$\int_1^u \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^u = -\frac{1}{u} + 1$$

$$\left(-\frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{x^2} \text{ であり}$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} -\frac{1}{u} + 1 = 1$$

と(2)の広義積分は

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} = 1 \text{ とある。}$$



(2) $u > 1$ とし,

$$\int_1^u \frac{1}{x} dx = \left[\log x \right]_1^u = \log u - 0 = \log u$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

と(2)の

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{1}{x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \log u = \infty$$

$$\text{したがって } \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$$

Schwarzの不等式

任意の実数 x_i, y_i に対し

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

が成り立つ。この式を $S_{p \frac{2}{2}}$, $S_{p \frac{2}{2}}$ と

対応不等式と見ると

定理 4.3 f, g を積可能とすると

$$S_{p \frac{2}{2}}^{fg}$$

(等号が成り立つ場合を除く)

$$\left(\int_a^b fg \, dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \, dx \int_a^b g^2 \, dx$$

が成り立つ。