

積分計算例

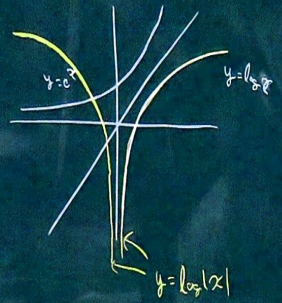
例 5.1

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C \quad (x \neq 0)$$

$$\log|x| = \begin{cases} \log x & x > 0 \text{ のとき} \\ \log -x & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

↑ $x=0$ は定義してない

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \text{ のとき} \\ 0 & x = 0 \text{ のとき} \\ -x & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$



$$(\log|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \text{ のとき} \\ -\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

命題 5.2

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が Riemann 積分可能な,
 f は有界である?

(定理) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続ならば Riemann 積分可能

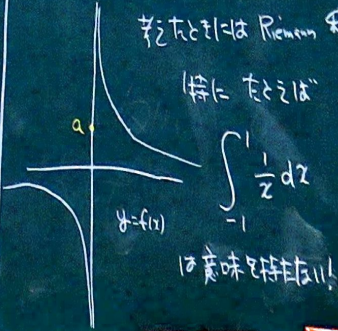
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \text{ のとき} \\ a & x = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

つまり $f(x)$ を $[a, b] \subseteq (-\infty, 0)$ または $[a, b] \subseteq (0, \infty)$
 で与えとき, $f(x)$ は $[a, b]$ で連続な Riemann 積分可能

$$\int_a^b \frac{1}{x} = [\log|x|]_a^b$$

ただし, $a < 0 < b$ のときには,

$f(x)$ は $[a, b]$ で有界でないからこの区間で
 Riemann 積分可能でない



特に $a=0$ は

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$

は意味を持たない!

積分計算の例

有理関数の積分

多項式
多項式
↑
分母
分子

有理関数 (rational function) とは、

お上の有理関数の積分は
具体的に式で書ける。

(cf. 単項式と多項式(関数)で積分可能だが
積分が知られている関数の組み合わせ)

書けないうちのた(さん)は。

以下の例2の計算方法を組み合わせるとお上の有理関数の
計算が?。

例5.3

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = (*)$$

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad \text{とあらわせないか?}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$$

$$(*) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(x-1)'}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{(x+1)'}{x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log(|x-1|) - \frac{1}{2} \log(|x+1|) + C \quad (x \neq -1, x \neq 1 \text{ のとき})$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{|x-1|}{|x+1|}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + C //$$

$$c \log a + d \log b = \log(a^c \cdot b^d)$$

$$\log a - \log b = \log(a \cdot b^{-1}) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

積分計算の例

有理関数の積分

多項式 / 多項式 の形の有理関数を
↑
有理関数 (rational function) とする。

あつての 有理 関数の積分は
具体的に公式で書ける。

(cf. 単独では書ける関数で積分可能だが
積分が知られている関数の組み合わせで

書けなかったものがある。
以下の例での計算方法を組み合わせると、この有理関数の
積分がき。

例 5.3

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = (*)$$

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad \text{とあらわせないか?}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$$

$$(*) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(x-1)'}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{(x+1)'}{x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log(|x-1|) - \frac{1}{2} \log(|x+1|) + C \quad (x \neq -1, x \neq 1 \text{ のとき})$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{|x-1|}{|x+1|}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + C //$$

$$c \log a + d \log b = \log(a^c \cdot b^d)$$

$$\log a - \log b = \log(a \cdot b^{-1}) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

積分計算例

有理関数の積分

$\frac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ の形の有理関数を
 $\frac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$

有理関数 (rational function) とは、

上の有理関数の積分は
 具体的に反式で書ける。

(cf. 単位の反式で書ける関数で積分可能なものは
 積分が知られている関数の組み合わせで

書けるものばかりではない)

以下の例での計算方法を組み合わせると、この有理関数の
 計算できる。

例 5.4

$$\int \frac{x^3 - x + 4}{x^2 - 3x + 2} dx$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 3x + 2 \overline{) x^3 \quad \quad - x + 4} \\
 \underline{x^3 \quad - 3x^2 + 2x} \\
 3x^2 - 3x + 4 \\
 \underline{3x^2 - 9x + 6} \\
 6x - 2
 \end{array}$$

$$= \int \left(x + 3 + \frac{x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right) dx = (*)$$

$$(*) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \int \frac{6x - 2}{x^2 - 3x + 2} dx$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1) =$$

$$\left(\frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1} = \frac{6x - 2}{x^2 - 3x + 2} \right) \text{ とする } A, B \text{ を求める}$$

$$\frac{6x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{10}{x - 2} - \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1}$$

$$= \frac{(x - 1)A + (x - 2)B}{(x - 2)(x - 1)}$$

例 5.3 と同様、

$$\int \frac{6x - 2}{x^2 - 3x + 2} dx = 10 \log(|x - 2|) - 4 \log(|x - 1|) + C$$

$$= \log \left| \frac{(x - 2)^{10}}{(x - 1)^4} \right| + C$$

$$\begin{cases} -A - 2B = -2 \\ A + B = 6 \end{cases} \Rightarrow A = 10, B = -4$$

$$c \log a + d \log b = \log(a^c \cdot b^d)$$

$$\log a - \log b = \log(a \cdot b^{-1}) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

積分計算の例

有理関数の積分

多項式 / 多項式 分子 / 分母 の形のもので表わされる関数を

有理関数 (rational function) とする。

おける有理関数の積分は具体的に式で書ける。

(cf. 単項式で表わされる関数で積分可能なものは有限個知られている関数の組み合わせ)

書けなかったものたくさんある。

以下の例での計算方法を組み合わせると、この有理関数の積分できる。

例 5.5

$$\int \frac{x}{x^2-2x+2} dx = \int \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2+1} dx$$

← 定数のはいりでは
関数分解で書ける

$$= \int \frac{(x-1)}{(x-1)^2+1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2+1} dx = \frac{1}{2} \log(|(x-1)^2+2|) + \text{Arctan}(x-1) + C$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{((x-1)^2+2)'}{(x-1)^2+2} dx \quad (x-1)' = 1$$

$$= \frac{1}{2} \log(|(x-1)^2+2|) + C$$

これは
合成関数の
積分法から

$$= \int \frac{(x-1)'}{(x-1)^2+1} dx$$

$$= \text{Arctan}(x-1) + C$$

$$c \log a + d \log b = \log(a^c \cdot b^d)$$

$$\log a - \log b = \log(a \cdot b^{-1}) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\int \frac{1}{t^2+1} dt = \text{Arctan } t + C$$

$$(\tan \theta)' = \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)' = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$$

$$(\text{Arctan } t)' = \frac{1}{1+t^2} \Big|_{t=\text{Arctan } t} = \frac{1}{1+t^2}$$