

<http://fuchino.ddo.jp/kobe/index.html>

#Calculus3-4-2018

(試験の予想問題集の1に7あり)

広義積分の収束と発散 I を区間とし、

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が任意の区間 $[a, b] \subseteq I$ ($a, b \in \mathbb{R}$)
に対して $f|_{[a, b]}$ が積分可能と仮定する。

このとき $f|_{[a, b]}$ が積分可能と仮定する。

$f|_{[a, b]}$ の積分

たとえば $I = [a, \infty)$ の形をしているとき、 $f(x)$ の $[a, \infty)$ での

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

と定義したとき、

あるいは $I = (a, b)$ のとき、

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+0, d \rightarrow b-0} \int_c^d f(x) dx$$

とする。

たとえば

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \infty$$

どんな $R \in \mathbb{R}$ に対しても十分に大きな $B \in \mathbb{R}$ に対し

$$b > B \text{ ならば } \int_a^b f(x) dx > R$$

と仮定すると、(このとき、 $\int_a^\infty f(x) dx$ は無限大に発散する

という。)

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \text{ が有限値に収束する。}$$

定理 6.1 $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が任意の $[a, b] \subset [a, \infty)$

で積分可能と仮定し、 $f(x) \geq 0$ かつ $x \in [a, \infty)$

$$\text{ならば、}\Phi: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; u \mapsto \int_a^u f(x) dx$$

(単調増加関数) となる。

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Phi(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u f(x) dx \text{ (有限値か、}\infty\text{か)}$$

ある $c \in \mathbb{R}$ と仮定する。

証明 $u, v \in \mathbb{R}$ $u \leq v$ ならば

$$\Phi(u) = \int_a^u f(x) dx \leq \int_a^v f(x) dx = \Phi(v)$$

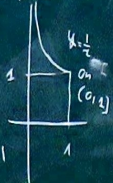
つまり Φ は単調増加関数。また Φ が有界ならば $\lim_{u \rightarrow \infty} \Phi(u) = \sup \{\Phi(u) \mid u \in [a, \infty)\}$

定理 6.2 (Riemann 積分可能) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は Riemann 積分可能である

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は Riemann 積分可能である
 f は有界である。つまり、 $c, d \in \mathbb{R}$ $c < d$ かつ
 $c \leq f(x) \leq d$ となる $x \in [a, b]$ に対して存在する。

例 1 $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$ とする

$f[(0, 1]] = [1, \infty)$ であり、
 f をどのように $[0, 1]$ に拡張しても f の
 拡張は定理 6.2 の Riemann 積分可能でない



この関数の $[0, 1]$ での広義積分は、

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow 0+0} \int_u^1 \frac{1}{x} dx$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0+0} [\log x]_u^1$$

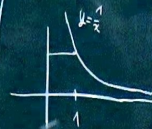
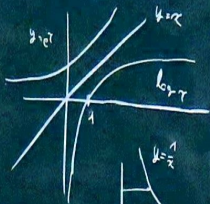
$$= 0 - \lim_{u \rightarrow 0+0} \log u$$

$$= \infty$$

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u \frac{1}{x} dx$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} [\log u]_a^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \log u - \log a = \infty$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$



例 3 $q > 0$
 $d > 1$ のとき

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^d} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u \frac{1}{x^d} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{-d+1} x^{-d+1} \right]_a^u$$

$$\frac{1}{x^d} = x^{-d} = \left(\frac{1}{-d+1} x^{-d+1} \right)' = \frac{a^{-d+1}}{d-1} < \infty$$

$$(x^\beta)' = \beta x^{\beta-1}$$

$$(*) x^{-d+1} = \frac{1}{x^{d-1}}$$

例 11 $d < 1$ のとき

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^d} dx = \dots = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{-d+1} x^{-d+1} \right]_a^u = \infty$$

定理 6.3 I は区間とす

広義積分 $\int_I |f(x)| dx$ が有限の値に収束する
 とき、 $\int_I f(x) dx$ も有限の値に収束する

f は I で
 絶対収束する
 こと

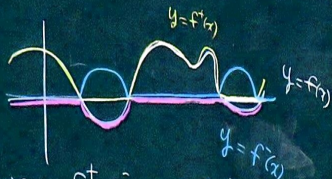
(*) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ とし、 I は含まれる区間の
 $[a, b] \subset I$ 上 f は Riemann 積分可能とす。
 同様の性質は $|f|$ についても成り立つ

注意 上の性質は必要十分条件ではない。つまり、 $\int_I f(x) dx$ は
 有限の値をとるが $\int_I |f(x)| dx = \infty$ とおけるようなものは存在する。

証明

$$f^+: I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-: I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto -\min\{f(x), 0\}$$



すると f^+, f^- はともに区間の I に含まれる区間上で
 積分可能 (http://fuchino.ddo.jp/notes/math-notes-elementary.pdf
 を参照)

定理 6.1 より $\int_I f^+(x) dx$ は有限の値または ∞ だが、

$$0 \leq f^+(x) \leq |f(x)| \text{ により}$$

$$\int_I f^+(x) dx \leq \int_I |f(x)| dx < \infty$$

したがって、 $\int_I f^+(x) dx = c^+ \in \mathbb{R}$ と有限の値をとる。
 同様に、

$$\int_I f(x) dx = \int_I (f^+(x) - f^-(x)) dx =$$

$$= \int_I f^+(x) dx - \int_I f^-(x) dx = c^+ - c^- \in \mathbb{R}$$

系 6.4

ある $a > 0$ と $d > 0$ に対し $|f(x)| \leq \frac{C}{x^d}$ が
 成り立つとき

$\int_a^\infty f(x) dx$ は収束する

証明 $\int_a^\infty |f(x)| dx \leq \int_a^\infty \frac{C}{x^d} dx$
 $= C \frac{a^{1-d}}{1-d} < \infty$

したがって、定理 6.3 より $\int_a^\infty f(x) dx$ は有限の値をとる。