

例 2
Γ-関数

$$t > 0 \text{ に対し, } \Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

とし, $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する

上の定義積分は $x > 0$ に対し

収束する (以下を参照) Γ -関数は

通常の関数の組合せではあらわせない

これは知られている

このように関数の重要性を特徴付ける関数といふ

補題 7.1 $a > 0$ に対し,

$$0 < x^{a-1} e^{-x} \leq e^{-\frac{1}{2}x} \quad \forall x > a \text{ に対し}$$

と示す。

$$\text{証明} \quad x^{a-1} e^{-x} \leq e^{-\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow x^{a-1} \leq e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{a-1}}{e^{\frac{1}{2}x}} \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{a-1}}{e^{\frac{1}{2}x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-1)x^{a-2}}{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C x^{a-n}}{D e^{\frac{1}{2}x}} = 0$$

L'Hôpital の定理
を繰り返し用いる

$$\leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C x}{D e^{\frac{1}{2}x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C}{\frac{1}{2} D e^{\frac{1}{2}x}} = 0$$

L'Hôpital

(ただし, $\frac{1}{2} = \varepsilon$ とする), $a > 0$ に対し

$$\frac{x^{a-1}}{e^{\frac{1}{2}x}} < \frac{1}{2} \quad \forall x > a$$

$$\therefore 0 < x^{a-1} < \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} < e^{\frac{1}{2}x} \quad \forall x > a$$

補題 7.2 $\int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ は $\forall t > 0$ に対し収束する

$t > 0$ に対し収束する

例 3 $x > 0$

$0 < x^{t-1} e^{-x}$ には注意する。これは補題 7.1 のように

$$\int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u x^{t-1} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^a x^{t-1} e^{-x} dx + \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u x^{t-1} e^{-x} dx$$

$$\leq \int_0^a x^{t-1} e^{-x} dx + \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u e^{-\frac{x}{2}} dx$$

補題 7.1

これは前回の系 6.4 により $\int_a^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = 2e^{-\frac{a}{2}} < \infty$

ガンマ関数

$$t > 0 \text{ に対し, } \Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

とし, $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する.

上の定義積分はすべての $t > 0$ に対し収束する.

Γ -関数は $m! = m(m-1)(m-2)\cdots 2 \cdot 1$ を自然に拡張する関数である.

補題 7.3 (1) $\Gamma(1) = 1$

(2) すべての $t > 0$ に対し $\Gamma(t+1) = (t+1)\Gamma(t)$

(3) すべての自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し $\Gamma(n) = n!$

$$\Gamma(n+1) = (n+1)\Gamma(n)$$

$n!$ は次で再帰的に定義される:

$$1! = 1$$

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

$\Gamma(t)$ は増加関数なので
 $m \leq t \leq M \quad (m, M \in \mathbb{N} \quad m < M)$

$$\text{したがって } m! = \Gamma(m) \leq \Gamma(t) \leq \Gamma(M) = M!$$

証明 (1):

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^{1-1} \cdot e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

$$= \left[-e^{-x} \right]_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

$$(2) \quad \Gamma(t+1) = \int_0^{\infty} x^{(t+1)-1} e^{-x} dx$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \left[x^t (-e^{-x}) - \int t x^{t-1} (-e^{-x}) dx \right]_0^u$$

$$= \left[x^t (-e^{-x}) \right]_0^{\infty} + t \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \left[u^t (-e^{-u}) - 0^t (-e^{-0}) \right]$$

$$= t \Gamma(t)$$

(3) は (1) + (2) と階乗の定義から.



ベータ関数 $p, q > 0$ に対し

$$B = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

↑
β関数

$\mu \rightarrow M$	$\varepsilon \rightarrow E$	$T \in X$
$x \rightarrow X$	$\tau \rightarrow T$	$\tau \in X$

たとえば $0 < p < 1$ $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{p-1} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x^{1-p}} = \infty$
 (ただし $p-1 < 0$ である)

したがって $\square$ は広義積分である。

Γ-関数の値の収束の証明で用いた

アイテアは次のようにまとめられる。

定理 7.4 $f(x) > 0, g(x) > 0, x \in [a, \infty)$ として

任意の $b > a$ に対し f と g が $[a, b]$ 上積分可能とする。
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ として

(1) $l \in \mathbb{R}, l \neq 0$ ならば, $\int_0^\infty f(x) dx$ が収束する $\Leftrightarrow \int_0^\infty g(x) dx$ が収束する

(2) $l = 0$ ならば, $\int_0^\infty g(x) dx$ が収束する $\Rightarrow \int_0^\infty f(x) dx$ が収束する。

(3) $l = \infty$ ならば, $\int_0^\infty f(x) dx$ が収束する $\Rightarrow \int_0^\infty g(x) dx$ が収束する。

証明

(2) は Γ-関数の値の収束の証明の議論を一般化するにすぎない。

(1): $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l, l \neq 0$ ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{l}$

に注意して (2) の証明と同様に両方向の証明が出来る。

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ ならば (2) が必要。
 (ただし (1) が必要)

□