

微分積分学 4

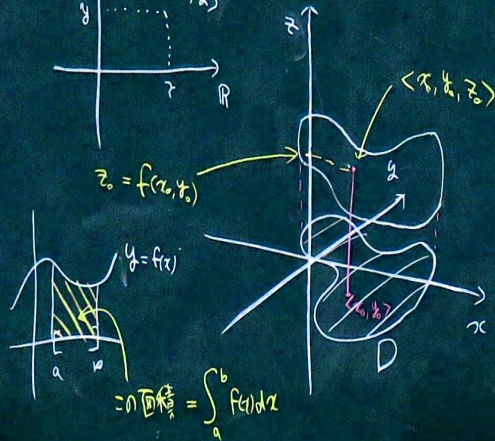
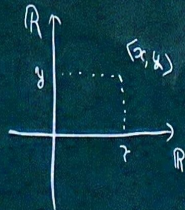
担当 斎藤 昌 (Sakai Fumio)

<http://fuchino.dto.jp/hobe/>

二変数関数

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}; \langle x, y \rangle \mapsto f(x, y)$$

$\subset \mathbb{R}^2$



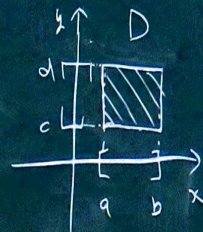
$$\text{面積} = \int_a^b f(x) dx$$

二変数関数の長方形領域での
(Riemann) 積分

実数 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $a < b, c < d$ に対し領域

$$D = [a, b] \times [c, d] = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$$

を考へ?



$f: D^* \rightarrow \mathbb{R}$
(ただし $D \subseteq D^* \subseteq \mathbb{R}^2$)
に対し 領域 D での f の
積分 $\iint_D f(x, y) dx dy$
を定義せよ.

長方形の区間 $[a, b] \times [c, d]$ の分割

P_x と P_y を $[a, b]$ と $[c, d]$ の (一致数の) 分割
のとき D の分割とす. すると,

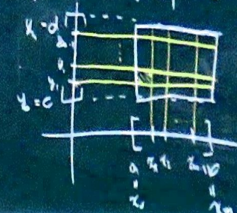
$$P_x = \{x_0, \dots, x_m\} \quad P_y = \{y_0, \dots, y_n\}$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d \quad \text{と 2 分割}$$

$$P_x \times P_y = \{ [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n \}$$

を考へ?



$P_x \times P_y$ の各要素 $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ (4番点)

に対し, $\langle \xi_i, \eta_j \rangle \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ を S_m

$\Theta = \{ \langle \xi_i, \eta_j \rangle \mid 0 \leq i < m, 0 \leq j < n \}$ を分割 $P_x \times P_y$

に対し,

$$S_{P_x \times P_y, \Theta}^f = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{f(\xi_i, \eta_j) (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j)}_{\text{面積要素}}$$

分割 $P_x \times P_y$ の細かさ $|P_x \times P_y|$ を

$$|P_x \times P_y| = \max \left\{ \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2} \mid 0 \leq i < m, 0 \leq j < n \right\}$$

と定義する。分割の細かさを δ とし $0 = \delta < 1$ ならば、
分割 $P_x \times P_y$ が δ 点分割 Θ の形になっている。

$S_{P_x \times P_y, \Theta}^f$ が一定の値 A に近づくとき

この値を f の領域 $[a, b] \times [c, d]$ の

積分とよみ、

$$A = \iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy$$

とあらわす。このとき f は $[a, b] \times [c, d]$ で積分可能であるという

特に f が有界関数のとき (i.e., $f([a, b] \times [c, d]) \subseteq [u, v], u, v \in \mathbb{R}, u < v$ と仮定)

分割の各 cell $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ 上で

という値の極大値, 極小値を M_{ij}, m_{ij}

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} m_{ij} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j) \leq S_{P_x \times P_y}^f$$

$$S_{P_x \times P_y, \Theta}^f = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_j) (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j) = \overline{S}_{P_x \times P_y}^f \text{ と表す。}$$

$\lim_{|P_x \times P_y| \rightarrow 0} \underline{S}_{P_x \times P_y}^f$ は常に存在する。

$$\lim_{|P_x \times P_y| \rightarrow 0} \overline{S}_{P_x \times P_y}^f = \int_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy \quad (\text{定理})$$

は常に存在する。

$$\int_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy \quad (\text{二重積分})$$

定理 (証明は「数ⅢのA-3」を参照)

f が $[a, b] \times [c, d]$ で積分可能となるのは、

$$\int_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy = \int_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dy dx \text{ と表す}$$