復習

$D \subseteq [a,b]\times[c,d]$ に対して

Dの特性関数

$\chi_D : [a,b]\times[c,d] \to \{0,1\}$ ($\subset \mathbb{R}$)

$(x,y) \longmapsto \begin{cases} 1 & (x,y)\in D \text{ のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$

とする

Dが$[a,b]\times[c,d]$で積分可能なとき

任意の積分可能な $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ に

対して、$\iint_D f\,dxdy$ を $\iint_{[a,b]\times[c,d]} \chi_D f\,dxdy$ により

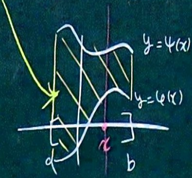
定義する。

$\varphi,\psi:[a,b]\to[c,d]$ が連続で すべての

$x\in[a,b]$ に対して $\varphi(x)\le\psi(x)$ が成り立つとき、

$D=\{(x,y)\in[a,b]\times[c,d] \mid \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$

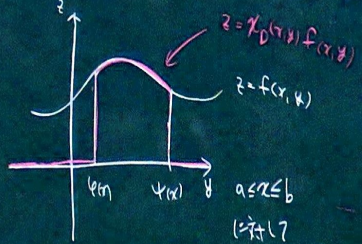
とする



とき、

$\iint_D f(x,y)\,dxdy$

$= \int_a^b\left(\int_c^d \chi_D f(x,y)\,dy\right)dx$



$a\le x\le b$ に対して

$(*) = \int_0^1 \frac{2}{3}x^4\,dx$

$= \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$

$= \frac{2}{15}$

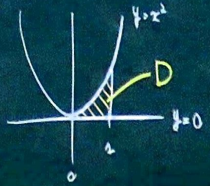
$= \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$

である。

$\int \sqrt{y}$ $= \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]$ | x^2 $=\frac{1}{3}x^3$

xとyの役割りを入れかえたときにも同様のことが成り立つ。

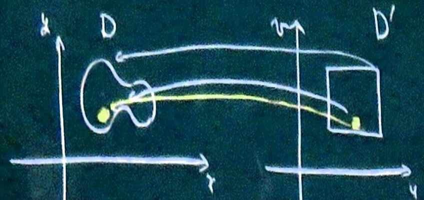
例) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2\}$ (≤ 1)



$\iint_D x\sqrt{y}\,dxdy$ $(*)$

$= \int_0^1\int_0^{x^2} x\sqrt{y}\,dy\,dx = \int_0^1\left[x\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx$

変数変換による積分計算

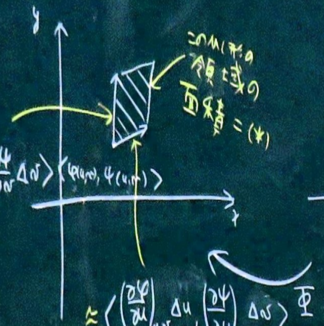


$\langle \varphi(u,v), \psi(u,v) \rangle \xleftarrow{\Phi} \langle u,v \rangle$

1-1で
φとψはC¹級
とする

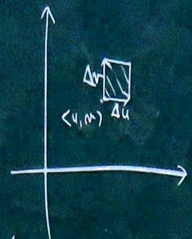
$D = \Phi[D']$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v), \psi(u,v))\, \boxed{|J|}\, dudv$$



$\approx \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v \right\rangle$ $\langle \varphi(u,v), \psi(u,v) \rangle$

$\approx \left\langle \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_{u,v} \Delta u, \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_{u,v} \Delta v \right\rangle$ Φ



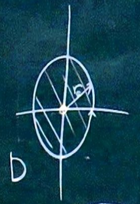
$$(*) = \left| \det \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \right| \Delta u \Delta v$$

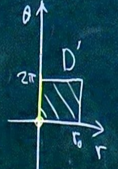
絶対値

ヤコビアン

J　Jacobian

(例) 極座標変換





$\langle r\cos\theta, r\sin\theta \rangle \longleftarrow \langle r,\theta \rangle$

$$J = \det \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

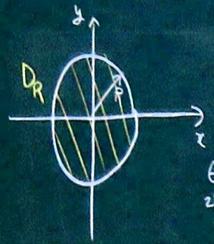
$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta$$

$$= r\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} = r$$

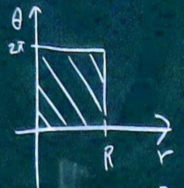
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, \overset{|r|\,=}{r}\, drd\theta$$

例 $R>0$

(1) $D_R = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$



$\sqrt{x^2+y^2}$: (x,y) の原点からの距離



$[0,R]\times[0,2\pi]$

$$\iint_{D_R} e^{-k(\underbrace{x^2+y^2}_{r^2})}\,dx\,dy$$

$$= \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-kr^2}\, r \; dr\,d\theta$$

$$r e^{-kr^2} = \left(-\frac{1}{2k} e^{-kr^2}\right)'$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r e^{-kr^2}\,dr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2k}e^{-kr^2}\right]_0^R d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2k}\left(1-e^{-kR^2}\right)d\theta$$

$$= \frac{\pi}{k}\left(1-e^{-kR^2}\right) \;//$$