

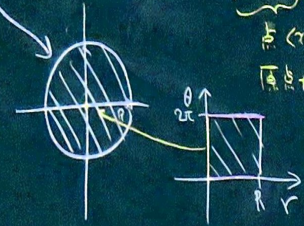
(前問を訂正)

例 $R > 0$

$$D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

といて

$\sqrt{x^2 + y^2} \leq R$
点 (x, y) の
原点からの距離



$$\iint_{D_R} e^{-k(x^2+y^2)} dx dy = (*)$$

$x^2 + y^2 = r^2$

$[0, R] \times [0, 2\pi]$

$\Phi: (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$
は 1-1 対応で全射
点の全体は面積の 1/2 無視して

$(0, R) \times [0, 2\pi)$ では Φ は

1-1 対応上 Φ の逆写像

$$(*) = \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} e^{-kr^2} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r e^{-kr^2} dr \right) d\theta$$

$re^{-kr^2} = \left(-\frac{1}{2k} e^{-kr^2} \right)'$

$= (*)$

$\frac{1}{2k} = (q\theta)'$

$$(*) = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2k} e^{-kr^2} \right]_0^R d\theta$$

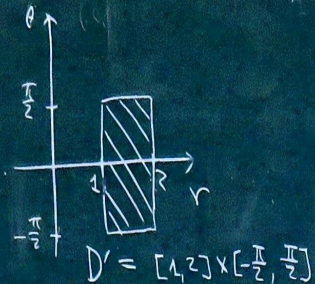
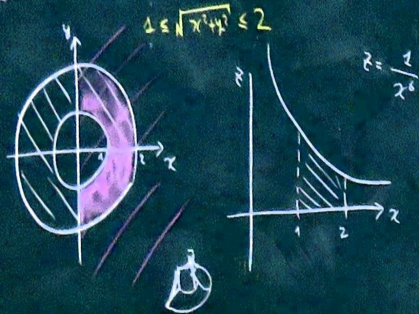
$$= \left[-\frac{1}{2k} (1 - e^{-kR^2}) \theta \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{k} (1 - e^{-kR^2})$$

$$\iint_{D_R} e^{-k(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{k} (1 - e^{-kR^2})$$

$$\uparrow \text{例} \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^3} dx dy = (*)$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$



$$(*) = \iint_{D'} \frac{1}{(r^2)^3} \underbrace{(r)}_{r^0} dr d\theta = (**)$$

$$(**) = \iint_{D'} r^{-5} dr d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^2 \left(-\frac{1}{4} r^{-4} \right)' dr d\theta = \left(-\frac{1}{4} r^{-4} \right)'$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[-\frac{1}{4} r^{-4} \right]_1^2 d\theta = (***)$$

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{2^4} - \left(-\frac{1}{4} \frac{1}{1^4} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$

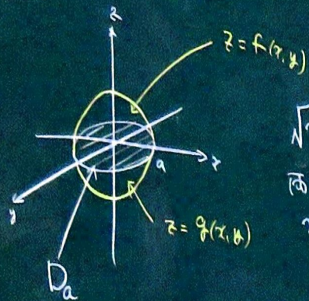
$$(***) = \left[\frac{15}{64} \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{15}{64} \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)}_{\pi}$$

$$= \frac{15}{64} \pi$$

$$\iint_{D_R} e^{-k(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{k} (1 - e^{-kR^2})$$

例 半径 a の球の体積を求めよ



$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a$$

両辺を2乗して
 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$\iint_{D_a} f(x, y) - g(x, y) \, dx \, dy$ を計算すればよい。
 (*)

$$z^2 = a^2 - (x^2 + y^2)$$

$$z = f(x, y) > 0 \text{ となる } z \text{ の値は } z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

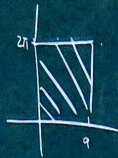
$$(\pm a, 0) \text{ で } f(x, y) = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$z = g(x, y) < 0 \text{ となる } z \text{ の値は } z = -\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$-z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$(\pm a, 0) \text{ で } g(x, y) = -\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$(*) = \iint_{D_a} 2\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} \, dx \, dy = (**)$$



$$(**) = \int_0^{2\pi} \int_0^a 2r\sqrt{a^2 - r^2} \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} a^3 d\theta$$

$$= \left[\frac{2}{3} a^3 \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi a^3$$

例 円板の面積
 (半径 a)

$$\iint_{D_a} 1 \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a 1 \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^a d\theta = \left[\frac{1}{2} a^2 \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} a^2 2\pi = \pi a^2$$

$$\iint_{D_R} e^{-k(x^2 + y^2)} \, dx \, dy = \frac{\pi}{k} (1 - e^{-kR^2})$$

広義積分

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) \geq 0$ とす
 f が 任意の原点を中心とした半径 R の円周板 D_R 上で積分可能とき

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} f(x,y) dx dy \text{ が存在するとき}$$

この値を f の $\mathbb{R}^2$ 上の広義積分 $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$ と定義する。

補題 5.1

★ 補題 5.1 は 5.2 の基礎

(2) $[a,b] \times [c,d] \supset D$ $D = D_1 \cup D_2$ とし f は D 上で積分可能な関数とすとき、
 $\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D_1} f(x,y) dx dy + \iint_{D_2} f(x,y) dx dy$ となる。

(2) $f(x,y) \geq 0$ のとき $D_1 \subseteq D_2 \subseteq [a,b] \times [c,d]$
 $0 \leq \iint_{D_1} f(x,y) dx dy \leq \iint_{D_2} f(x,y) dx dy$ となる。

補題 5.2

$f(x,y) \geq 0$ かつ 任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ 上で成り立つときは

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} f(x,y) dx dy = \lim_{S \rightarrow \infty} \iint_{[-S,S] \times [-S,S]} f(x,y) dx dy$$



証明

$$D_R \subseteq [-R, R] \times [-R, R] \subseteq D_{\sqrt{2}R}$$

となるから 補題 5.1 (2)



$$\iint_{D_R} f(x,y) dx dy \leq \iint_{[-R,R] \times [-R,R]} f(x,y) dx dy$$

$$\leq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} f(x,y) dx dy$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} f(x,y) dx dy \leq \lim_{S \rightarrow \infty} \iint_{[-S,S] \times [-S,S]} f(x,y) dx dy \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} f(x,y) dx dy$$

$$\iint_{D_R} e^{-k(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{k} (1 - e^{-kR^2})$$

ガウス積分

Gaussian integral

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} e^{-k(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{k}$$

// 補題 5.2

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \iint_{[-S, S] \times [-S, S]} e^{-k(x^2+y^2)} dx dy = (*)$$

$$(*) = \lim_{S \rightarrow \infty} \int_{-S}^S \left(\int_{-S}^S e^{-kx^2} e^{-ky^2} dx \right) dy$$

$$= \lim_{S \rightarrow \infty} \int_{-S}^S e^{-ky^2} \left(\int_{-S}^S e^{-kx^2} dx \right) dy$$

$$= \lim_{S \rightarrow \infty} \left(\int_{-S}^S e^{-kx^2} dx \right) \left(\int_{-S}^S e^{-ky^2} dy \right) = (**)$$

$$(**) = \lim_{S \rightarrow \infty} \left(\int_{-S}^S e^{-kx^2} dx \right)^2$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} dx \right)^2$$

↑ π, 2 の 1/2 をとる?

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

$$\iint_{D_R} e^{-k(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{k} (1 - e^{-kR^2})$$