

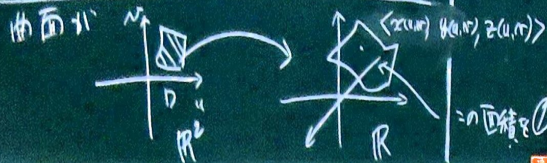
定期計算の
"予想問題集"

<http://fuchino.ddo.jp/kobae/>

(<http://fuchino.ddo.jp/kobae/>)

b: make-4-pros-pro-find.pdf

持: 可 90分-α,



⑦

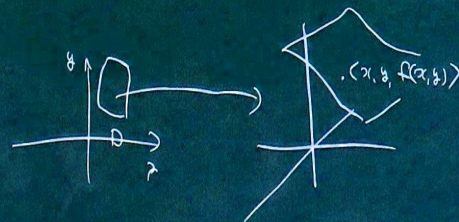
$$(*) = \iint_D \sqrt{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2} du dv$$

と定義する。

定理 7.1 $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が C_1 -級 の

とき $S = \{ \langle x, y, f(x, y) \rangle \mid \langle x, y \rangle \in D \}$

の面積 A は,



$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

7.5.5.4.8.

証明

(*) を $\mathbb{R}^3$ の S の定義にあてはめて計算する。

$$A = \iint_D \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial x}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial x}{\partial y} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix}^2} dx dy$$

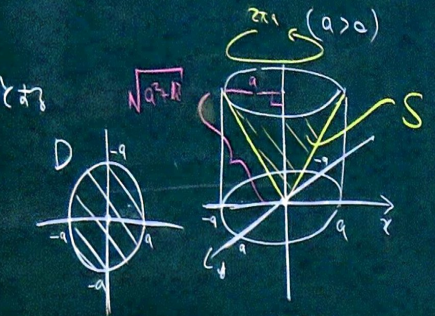
$$= \iint_D \sqrt{\left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 + 1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2} dx dy$$

$$= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy$$

円錐の表面積

$$D \ni (x, y) \mapsto \left(x, y, \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$t=t \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$



このとき S の面積は定理 7.1 より、

$$\int_D \frac{\sqrt{1^2 + 1^2}}{a} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sqrt{1^2 + 1^2}}{a} r dr d\theta = 0$$

$$f(x, y) = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f_x(x, y) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(f_x(x, y))^2 = \frac{x^2}{a^4 (x^2 + y^2)}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{a^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(f_y(x, y))^2 = \frac{y^2}{a^4 (x^2 + y^2)}$$

$$\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2}{a^4 (x^2 + y^2)} + \frac{y^2}{a^4 (x^2 + y^2)} + 1} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^4 (x^2 + y^2)} + 1} = \sqrt{\frac{1}{a^4} + 1} = \sqrt{\frac{1 + a^4}{a^4}} = \frac{\sqrt{1 + a^4}}{a}$$

$$A = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1^2 + 1^2}}{a} r^2 \right]_0^a d\theta$$

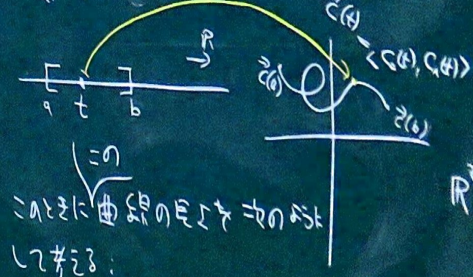
$$= \left[\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1^2 + 1^2}}{a} a^2 \theta \right]_0^{2\pi} = \pi \sqrt{1^2 + 1^2} a$$

$$= \pi a \sqrt{1^2 + 1^2} = \pi a \sqrt{2}$$

中学校の数学での面積計算

曲線の長さ

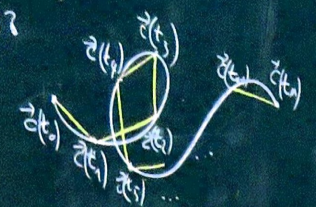
平面上の曲線を 10×10 のマス目を使って表わすことにする。



このとき曲線の長さを次のようにして求める。

P は $[a, b]$ の分割 $a = t_0 < \dots < t_n = b$

点 $\langle s(t_i), c_1(t_i) \rangle$ と $\langle s(t_{i+1}), c_1(t_{i+1}) \rangle$
 (1 ≤ i < n) を結ぶ直線の和として
 曲線 C の長さ
 (近似する)



$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(c_0(t_{i+1}) - c_0(t_i))^2 + (c_1(t_{i+1}) - c_1(t_i))^2}$$

$$= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{c_0(t_{i+1}) - c_0(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right)^2 + \left(\frac{c_1(t_{i+1}) - c_1(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right)^2} (t_{i+1} - t_i)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $(c'_0(t_i))^2$ $(c'_1(t_i))^2$

1-1 結合の定義

$$= \int_a^b \sqrt{(c'_0(t))^2 + (c'_1(t))^2} dt$$

となる。よって曲線 C の長さを定義する!

グリーンの定理 $\mathbb{R}^2$
 平面上の曲線 $\vec{c}: [a, b] \rightarrow D$ が $\mathbb{R}^2$ の有界領域 D の境界に
 なるものとする。
 $[a, b]$ の分割 $a = t_0 < \dots < t_n = b$ で $\forall i, \vec{c}|_{[t_i, t_{i+1}]}$ が C_1 級で (各成分が C_1 級)

$\vec{c}|_{[t_i, t_{i+1}]} = m=1$ のとき
 $\vec{c}$ は C_1 級であるという。
 曲線 $\vec{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して
 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ が C_1 級の時
 $\int_{\vec{c}} f dx \leq \int_a^b f(c_0(t), c_1(t)) \frac{dc_0(t)}{dt} dt$
 $\int_{\vec{c}} f dy \leq \int_a^b f(c_0(t), c_1(t)) \frac{dc_1(t)}{dt} dt$

② $\vec{c}$ は $(t_0, t_1) \cup (t_1, t_2) \cup \dots \cup (t_{n-1}, t_n)$ 上
 ③ $(c'_0(t))^2 + (c'_1(t))^2 \neq 0$
 となることとする。
 $\vec{c}$ の方向微分
 $\{c_0(t), c_1(t)\}_{t \in [a, b]}$
 の方向依存性!

$\vec{c}$ が区分的に可微分?

$a=t_0 < \dots < t_n=b$ の区間とすると

$$\int_{\vec{c}} f dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\vec{c}|[t_i, t_{i+1}]} f dx$$

と定義

D が区分的に可微分な曲線 $\vec{c}$ によって囲まれた領域とする



ただし ∂D は進行方向に向って左側に D の領域を見ながら進むものとする

定理 7.2 (グリーンの定理)

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = - \oint_{\partial D} f dy$$

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \oint_{\partial D} f dx$$

$$\partial D: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

グリーンの定理は微分積分学の基本定理の2次元版の対応ものに思える。

証明がよりくわしいは:

<http://fuchino.ddo.jp/hchoe/bbd/>

hineki-2-2016-07-26.pdf

を参照

特に $n=1$ のときは

$\vec{c}$ は閉曲線であるとする。

可微分な $\vec{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ として

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ が C^1 -級の時



$$\oint_{\vec{c}} f dx \leq \int_a^b f(c(t), c'(t)) \frac{dc(t)}{dt} dt$$

$$\oint_{\vec{c}} f dy \leq \int_a^b f(c(t), c'(t)) \frac{dc(t)}{dt} dt$$

② $\vec{c}$ は $(t_1, t_1) \cup (t_1, t_1) \cup \dots \cup (t_n, t_n) \cup \dots$

③ $(c_1(t))^2 + (c_2'(t))^2 \neq 0$

と仮定する。

$$\oint_{\vec{c}} f dx, \oint_{\vec{c}} f dy$$

$\vec{c}$ の方向を逆転させたとき $\{c_1(t), c_2(t)\}$ は逆転する!