微分積分 1

担当：渕野 昌
Fuchino Sakaé

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

講義の webpage：
http://fuchino.ddo.jp/kobe/

学修支援室 C棟 C401 お昼休み
4月22日 〜 5月30日

自然数 1, 2, 3, ⋯ natural number

自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ であらわす.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\} = \{n : n \text{ は自然数}\}$

整数の全体 ⋯ −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 ⋯

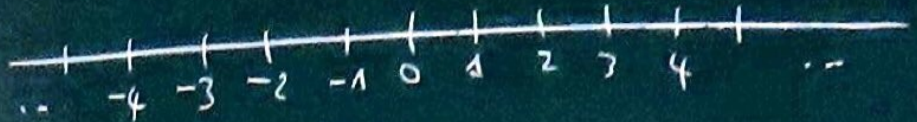
Zahlen 数 (独)

$\mathbb{Z} = \{\cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$
$= \{z \mid z \text{ は整数}\}$

有理数：分数として表わされる数

rational number
比の
quotient

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \,\middle|\, m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$



X を $\underbrace{\text{ある集まり}}_{\text{数学的な対象}}$（集合）とするとき、

$a \in X$ で（a は X の $\underbrace{\text{要素}}_{\text{の1つ}}$ である）をあらわす。

$\underset{=}{\text{element}}$
要素

$\mathbb{N}$ は $\mathbb{Z}$ の部分である（a が $\mathbb{N}$ の要素なら a は $\mathbb{Z}$ の要素でもある） $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

（または $\mathbb{N} \subseteqq \mathbb{Z}$）とあらわす $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$: $z \in \mathbb{Z}$ なら $\left(z = \frac{z}{1}\right) \in \mathbb{Q}$ である。

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\pi \notin \mathbb{Q}$ $e \notin \mathbb{Q}$ ….

実数：数直線上の点に対応するような数

$\underset{=}{\text{real numbers}}$

$\mathbb{R} = \{ r \,;\, r \text{ は実数} \}$

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ の要素で $\mathbb{Q}$ に含まれないものを無理数という irrational numbers

$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

区間 (intervals)

≦と≤は
同じ意味

$a, b \in \mathbb{R}$ $a<b$ のとき

$[a, b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$ 閉区間 closed interval

$(a, b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$ 開区間 open interval

$[a, b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r < b\}$

$(a, b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r \leq b\}$ 半開区間 half open interval

∞ $-\infty$ を実数の全体の右と左にある対象と思っておくから

これに対して区間の記号を用いると

$(-\infty, a] = \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq a\}$

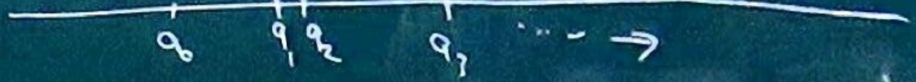
etc. とできる.

特に $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ である.

数列 sequence (sequence of real numbers)
rational..

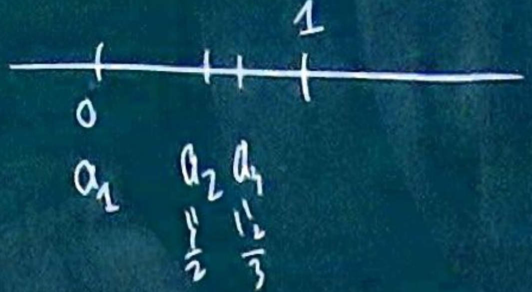
各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \in \mathbb{R}$ が対応しているとき, 列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ を $\{a_n\}$
$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ などと書き 数列とよぶ.

数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $n, m \in \mathbb{N}$ $n < m$ なら
常に $a_n \leq a_m$ が成り立つとき, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は,
(単調)増加であるという. 増加数列
increasing sequence



例 (1) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n = n$ とすると
$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 増加数列である

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ とすると



$a_1 = 3.1$
$a_2 = 3.14$
$a_3 = 3.141$
$\vdots$

(3) $\pi = 3.1415926535897932\cdots$
で a_n を π の小数点 n 桁までの表現のあらわす数とする

数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について, n を大きくしてゆくと

a_n が どんどんある数 b に近づくとき,

b は $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限であるといい, このことを

limit

$b = \lim_{n\to\infty} a_n$ と書く.

$\varepsilon\delta$-論法による, 厳密な極限の

イプシロン デルタ

定義

$b = \lim_{n\to\infty} a_n$ とは,

どんな $\varepsilon > 0$ に対しても ある $N \in \mathbb{N}$ がとれて

実数　　自然数

すべての $n > N$ に対して $|a_n - b| < \varepsilon$

となる.

$b = \lim_{n\to\infty} a_n$ のとき $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は b に収束するとも言う.

converge

前の例では (1) では $b = \lim_{n\to\infty} a_n$ となる $b \in \mathbb{R}$ は存在しない

(2) では, $1 = \lim_{n\to\infty} a_n$ である

(3) では $\pi = \lim_{n\to\infty} a_n$

単調増加数列 $\{a_n\}$ が上に有界 とは

bounded upward

ある実数 $a \in \mathbb{R}$ で $a_n \leq a$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成立つようなものが存在すること

実数の全体の完備性：

すべての単調増加で有界な実数列は極限を持つ

実数の全体は、

$\mathbb{Q}$ を稠密(ちゅうみつ)(dense)に含んでいて、完備性を持つような全順序集合として特徴づけられる。

解説　$X \subseteq \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ で稠密とは、

すべての $\mathbb{R}$ の区間 I に対し I と X は共通の要素をもつこと

$(X, \leq)$ が全順序集合とは、

$\leq$ は大小関係の基本性質を満たし

すべての $x, y \in X$ に対し $x \leq y$ または $y \leq x$ のどちらかが成りたつこと。