数列とその極限

数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $b\in\mathbb{R}$ に対し,

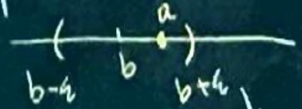
(17+

すべての どんなに小さな $\varepsilon>0$ に対し, ある十分に大きな

$\underset{\in\mathbb{N}}{N}$ をとると, すべての $n\geq N$ $(n\in\mathbb{N})$ に対し

$\Leftrightarrow$ $a_n\in(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

$|a_n-b|<\varepsilon$ となるようにできるとき,



$\{a_n\}$ は b に収束するといい これを,

$$b=\lim_{n\to\infty} a_n$$ "b は a_n の極限である"

とあらわす.

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が 上に有界な 上昇列なら

$b=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ となる $b\in\mathbb{R}$ が存在する.

（実数（全体）の完備性）
完全性

例 教科書 8〜9ページ

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n=1,2,3,\cdots$$

を考える. $(a+b)^n$ の展開式を使うと.

$\{a_n\}$ は上昇列で、 $a_n < 3$ となることがわかる。したがって実数全体の完備性から、

$b = \lim_{n\to\infty} a_n$ となる実数 b が存在する。

$2 \leq b \leq 3$ この数を e とよぶ

$e = 2.71828\cdots$ $(a>0)$

e は無理数で 後で e は $f(x) = a^x$ としたときに

$f'(x) = a^x$ となるような数として特徴づけられる。

Napier の定数 (Euler 数)

ネーピア　オイラー

数列の極限の基本性質

定理 2.1 数列の極限は存在するなら1意に存在する。 (教科書 定理 1.1)

定理 2.2 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ が収束するとき、 (教科書 定理 1.2)

(1) $c \in \mathbb{R}$ とすると $\{ca_n\}$ も収束して、 $\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$

(2) $\{a_n \pm b_n\}$ も収束して、 $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$

(3) $\{a_n b_n\}$ も収束して $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$

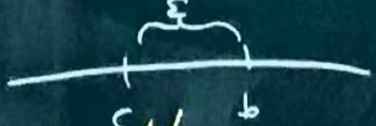
(4) $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ とすればある N 以上の $n \in \mathbb{N}$ では $b_n \neq 0$ となり

$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n>N}$ も収束して、 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \Big/ \lim_{n\to\infty} b_n$

定理2.1 の証明　$b, c \in \mathbb{R}$　$b \neq c$ で $\{a_n\}$ が

b にも c にも収束するとして矛盾を示す.

(背理法 argument by contradiction)



$\varepsilon = \frac{1}{2}|b-c| > 0$

a_n は b (c) に収束するので ある $N_b \in \mathbb{N}$ (N_c) をとると

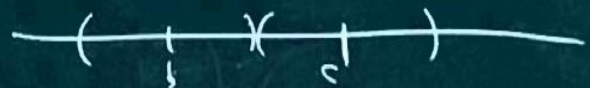
すべての $n > N_b$ $(n \in \mathbb{N})$ に対し,　$a_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

となる　$n > N_c$　　$a_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$

ここで $n > \max\{N_b, N_c\}$ とすると,

$a_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ かつ $a_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$

となるが, ε のとり方から, $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ と $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ は,



共通部分を持たないので矛盾である.

したがって数列 $\{a_n\}$ の極限となっている実数は高々1つである. ☒

定理2.2 (3) の証明の一部: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$　$b = \lim_{n\to\infty} b_n$

$ab = \lim_{n\to\infty} a_n b_n$ を言えばよい.

$\varepsilon > 0$ とする このとき, $\varepsilon_0(|a|+|b|) + \varepsilon_0^2 < \varepsilon$ となる $\varepsilon_0 > 0$ を

とる このとき, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ なので ある $N_a \in \mathbb{N}$ をとると

$b = \lim_{n\to\infty} b_n$　　$N_b \in \mathbb{N}$

すべての $n > N_a$ $(n \in \mathbb{N})$ に対し,　$a_n \in (a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0)$

$n > N_b$　　$b_n \in (b-\varepsilon_0, b+\varepsilon_0)$

$N = \max\{N_a, N_b\}$ とすると すべての $n > N$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して,

$$a_n \in (a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0) \quad b_n \in (b - \varepsilon_0, b + \varepsilon_0)$$

となるので, たとえば, $(a-\varepsilon_0)(b-\varepsilon_0) < (a+\varepsilon_0)(b+\varepsilon_0)$ として

$$a_n b_n \in ((a-\varepsilon_0)(b-\varepsilon_0), (a+\varepsilon_0)(b+\varepsilon_0))$$

となる

$$\subseteq (ab - (\varepsilon_0|a+b| + \varepsilon_0^2), ab + (\varepsilon_0|a+b| + \varepsilon_0^2)) \subseteq (ab - \varepsilon, ab + \varepsilon)$$

したがって, $a_n b_n \in (ab - \varepsilon, ab + \varepsilon)$ である

以上より, $ab = \lim_{n \to \infty} a_n b_n$ である.

⊠

$$(a-\varepsilon_0)(b-\varepsilon_0) = ab - \varepsilon_0(a+b) + \varepsilon_0^2$$

$$(a+\varepsilon_0)(b+\varepsilon_0) = ab + \varepsilon_0(a+b) + \varepsilon_0^2$$

$$|ab - (a-\varepsilon_0)(b-\varepsilon_0)| \leq \varepsilon_0|a+b| + \varepsilon_0^2$$

$$|ab - (a+\varepsilon_0)(b+\varepsilon_0)| \leq \varepsilon_0|a+b| + \varepsilon_0^2$$

定理2.3 $\underbrace{\{a_n\} \quad \{b_n\}}_{数列}$ について（教科書 定理1.3）

(1) $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ で、すべての n ($\in \mathbb{N}$) に対し

$a_n < b_n$ なら、 $\alpha \leq \beta$ である（$\alpha = \beta$ となる場合もある）

(2) $l = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ ですべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < c_n < b_n$

なら、 $l = \lim_{n\to\infty} c_n$ となる。

定理2.1 2.2と同様にできる（演習）。

定理2.4 (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ （教科書 定理1.4）

$r \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & (1 < r) \\ 1 & (r = 1) \\ 0 & r \in (-1, 1) \\ 不定 & r < -1 \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ($-\infty$) $\Leftrightarrow$ すべての $R \in \mathbb{R}$ に対して $N \in \mathbb{N}$ で

$n > N$ ($n \in \mathbb{N}$) に対し、 $a_n > R$ ($a_n < R$) となる

ものが存在する。 $\{a_n\}$ は ∞ に発散する。

写像(関数) mapping (function)

集合 X, Y に対し X の各要素に Y の要素を対応させるもの f が与えられているとき
このような f のことを X から Y への関数(写像)
といい、このことを、 $f : X \to Y$ とあらわす.

$a \in X$ が f によって $b \in Y$ に対応づけられるとき これを
$f(a) = b$ と書く. f が関数のとき、f の"a"を入れるスロットを x や $\cdot$ などであらわして $f(x)$, $f(\cdot)$ などと書くこともある.

変数

f が何か具体的な対応の規則で与えられているときには、

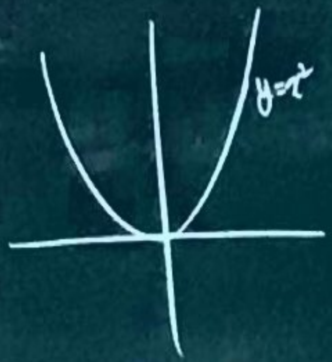
$f : X \to Y$; $x \mapsto$ "……となる x"

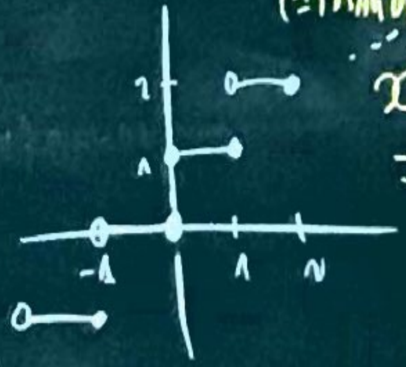
$x \mapsto f(x)$

などとしてあらわす

例) (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^2$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto$ x より大きいか等しい最小の整数





(1)の例の関数は、x^2 であらわされることもある.