関数（続き）
（写像）

$D \subseteq \mathbb{R}$

↑ 実数の領域

(domain) 区間 $[a, b)$, $[a, \infty)$ $(-\infty, b)$ etc

＝

など。 fの定義域とよぶ

domain of f

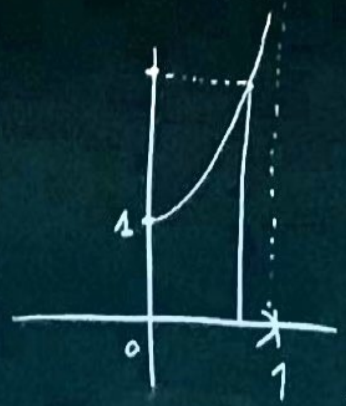
に対して、 $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$; $a \longmapsto f(a)$ を考える

$f[D] = \{ f(a) \mid a \in D \}$ を f の値域とよぶ

(range)

例1 $D = [0, 1)$ とし f を D 上の関数で

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ となるものとして定義すると、



$f[D] = [1, \infty)$

となる。後でもう少し厳密に見る。

injection

たんしゃ　one to one

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ が単射 $(1\text{-}1)$ であるとは、

$a, b \in D$ $a \neq b$ ならば $f(a) \neq f(b)$ となること

例1 2(a) 上の例の f は単射となる。

さらに $\underbrace{\text{}}_{\text{この}}$ f は真に増加である

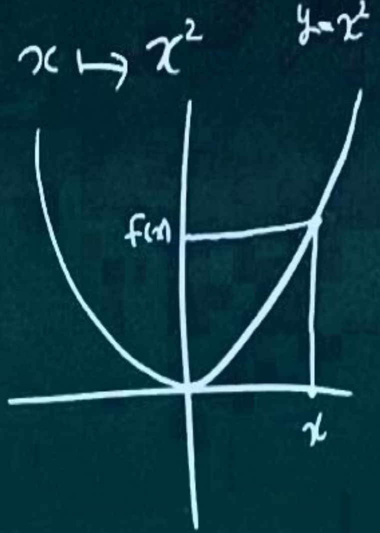
つまり $a, b \in D$ で $a < b$ なら必ず $f(a) < f(b)$
となる。（したがって特に単射である）

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,;\, x \mapsto x^2$

は単射ではない

たとえば $1 \neq -1$ だが

$f(1) = f(-1) = 1$



Y をある集合として
（たとえば $Y \subseteq \mathbb{R}$）

$\underset{\mathbb{R}}{\overset{}{\underset{\cap}{f : D}}} \longrightarrow Y$ が（Y への）$\overset{\text{じょうしゃ}}{\underline{\text{上射}}}$（または$\overset{\text{ぜんしゃ}}{\text{全射}}$, onto）
surjection

であるとは すべての $b \in Y$ に対し、$D \ni a$ で
$f(a) = b$ となるものがあること（つまり $f[D] = Y$ となること）

たとえば例1での $f : D \to \mathbb{R}$ は上射でない
（$f[D] = [1, \infty) \neq \mathbb{R}$）

この f は、$f : D \to \underset{[1,\infty)}{\underset{\|}{f[D]}}$ と見ることもできるが、f は
$f[D]$ への上射である。

$f: D \to Y$ が上射かつ単射のとき

f は上単射 (じょうたんしゃ) (または全単射 bijection one to one onto)

であるという.

$f: D \to Y$ が全単射のときには各 $y \in Y$ に対して, $f(x) = y$ となるような $x \in D$ がちょうど一つ存在する.

したがって関数 $g: Y \to D;\ y \mapsto$ $y = f(x)$ となるような $x \in D$

が考えられる。このような g を f の逆写像 (逆関数) とよび f^{-1} とあらわす.

inverse mapping / inverse function

例11.3 例11.2 (2) の関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$

の $\underbrace{[0, \infty)}_{\text{定義域を}}$ に制限して考え行き先も $[0, \infty)$ に制限したものを考える

$$f: [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty);\ x \mapsto x^2$$

と f は 1-1 onto なので $\underbrace{\text{逆関数}}_{f^{-1}}$ がとれる

$$f^{-1}: [0, \infty) \to [0, \infty);\ y \mapsto \boxed{\begin{array}{l} x^2 = y \text{ となるような} \\ 0 \text{ より大きいか等しい数} \end{array}} = \sqrt{y}$$

注意 (一般には) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ ではない!

例4　例3のfで

$f^{-1}(2)=\sqrt{2}$ だが

$$\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{4}$$

例5　$a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \ x\mapsto ax$ とすると

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ y\mapsto \underbrace{y=ax\text{ となる }x}_{\frac{y}{a}}$$

$f^{-1}(y)=\dfrac{y}{a}$ だが

$$f^{-1}(2)=\frac{2}{a}\qquad \frac{1}{f(2)}=\frac{1}{2a}$$

関数の合成

$f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ のとき $g\circ f: X\to Z$ を

$g\circ f(x)=g(f(x))$ となるものとして定義し、これを

fとgの合成関数とよぶ

例5　例1の関数 $f:[0,1)\to\mathbb{R}\ \ x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$

は、$g:[0,1)\to(0,\infty);\ x\mapsto 1-x$　$h:(0,\infty)\to(0,\infty)\ \ x\mapsto\dfrac{1}{x}$

とすると、$x\in[0,1)$に対し $h\circ g(x)=h(g(x))=h(1-x)=\dfrac{1}{1-x}=f(x)$

となるので、$h\circ g=f$ である。

補題 3.1 (1) $f: X \to Y$ に対し $g: Y \to X$ が f の逆関数なら f は g の逆関数である

($g = f^{-1}$ なら $f = g^{-1}$)

(2) $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ とするとき、

f は g の逆関数 $\Leftrightarrow$ $g \circ f: X \to X$ と $f \circ g: Y \to Y$ が共に恒等関数であること

(3) $f: X \to Y$ $g: Y \to X$ の

どちらかが 1-1 か全射的であることが知られているときには、

$g \circ f = id_X$ か $f \circ g = id_Y$ のどちらかが成り立てば

f と g は互いに逆関数であることが言える。

証明

(1): g が f の逆関数なら

$g: Y \to X$; $y \mapsto$ $f(x) = y$ となるような x

だがこのとき $g^{-1}(x) =$ "$g(y) = x$ となるような y"

である。

$g(y) = x$ は g の定義から、$f(x) = y$ となるような x

なので $g^{-1}(x) = f(x)$ である x は任意 ($\in X$) だったので

$g^{-1} = f$ つまり g の逆関数は f である。

$f: X \to X$ が恒等関数であるとは、

identity function

すべての $x \in X$ に対し、$f(x) = x$ となること。X上の恒等関数を id_X であらわす。

constant function

$f: X \to Y$ が定数関数であるとは、ある $a \in Y$ に対し、$f(x) = a$ がすべての $x \in X$ に対し成り立つこと。このような定数関数を c_a であらわす。

(2): g を f の逆関数とすると $x \in X$ に対して

↗ $g \circ f(x) = g(\boxed{f(x)})$ — "$f(x^*) = \boxed{f(x)}$ となるような $x^* \in X$"

$\boxed{x \text{ はそのような } x^* \text{ になっているので}}$

$= x$

したがって $g \circ f = \mathrm{id}_X$ である。$f \circ g = \mathrm{id}_X$ も同様に示せる。

$g \circ f = \mathrm{id}_X$　$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ だとすると、となるから、

↓ fは単射 gは全射

↓ fは全射 gは単射

$x \in X$ に対し $g \circ f(x) = \mathrm{id}_X(x) = x$ となることから、gはfの逆関数であることがわかる。

より詳しくは ↗

$f: X\to Y,\ g: Y\to X$ で, ① f は上射, ② $g\circ f = id_X$ とするとき $g=f^{-1}$ である

証明 ② から f は単射なので, f は全単射である.

① からすべての $y\in Y$ に対し $g(x)=y$ となる x があるが, このような x, y に対し,

$$\underset{\overset{\|\ ②}{x}}{g\circ f(x)} = g(f(x)) = g(y)$$

合成関数の定義　　x のとり方

したがって $g(y) =$ "$f(x)=y$ となるような $x\in X$"

となっているから, $g=f^{-1}$ である ☒

(3) は上の主張から出る.

例 指数関数 $e^{(\cdot)}$

$$e^{(\cdot)}: \mathbb{R}\to(0,\infty): x\mapsto e^{x}$$

この逆関数として $\log(\cdot): (0,\infty)\to\mathbb{R}: y \mapsto e^{x}=y$ となるような x

とする.

$e^{(\cdot)}$ は真に増加で後で見るように $e^{(-\infty,\infty)}=(0,\infty)$ となるのでこのような関数 $\log(\cdot)$ はとれる.

応用例

$$e^{\log(xy)} = id_{(0,\infty)}(x,y) = xy$$

$$e^{\log(x)+\log(y)} = e^{\log(x)}e^{\log(y)} = id_{(0,\infty)}(x)\, id_{(0,\infty)}(y) = xy$$

ここで $e^{(\cdot)}$ は真に増加なので 1-1

したがって $\log(x,y) = \log(x) + \log(y)$

$\boxtimes$

関数の合成

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$

のとき $g\circ f : X \to Z$ を

$g\circ f(x) = g(f(x))$ となるものとして定義し、これを

f と g の合成関数とよぶ

例5 例1 の関数 $f: [0,1) \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{1}{1-x}$

は、$g: [0,1) \to (0,\infty); x \mapsto 1-x$ $h: (0,\infty) \to (0,\infty)$ $x \mapsto \frac{1}{x}$

とすると、$x \in [0,1)$ に対し $h\circ g(x) = h(g(x)) = h(1-x) = \frac{1}{1-x} = f(x)$

となるので、$h\circ g = f$ である。