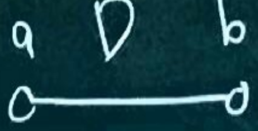
復習

$D \subseteq \mathbb{R}$
領域

関数 $f : D \to \mathbb{R}$

関数の(値の)極限

$a \in \mathbb{R}$ が D に接しているとき、(a は D の要素であるか あるいは、a のどんな近くにも D の要素があるとき)



例 $D=(a,b)$ のとき
a は D に接している
b

f の値の a での極限が $b \in \mathbb{R}$ である

記法

($\lim_{x \to a} f(x) = b$) とは、x を a にどんどん近づける とき $f(x)$ の値が どんどん b に近づくこと

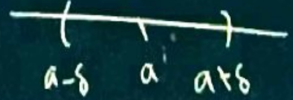
"$x \to a$ で $f(x)$ は b に収束する" とも言う。

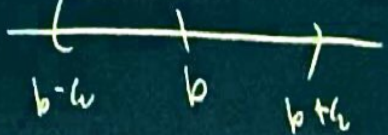
つまり どんな $\varepsilon > 0$ に対しても ある $\delta > 0$ に対して、

$\underbrace{x \in D}_{x \neq a}$ が $|a-x| < \delta$ なら、$|f(x) - b| < \varepsilon$ となること。

$|a-x| < \delta \iff x \in (a-\delta, a+\delta)$

$|f(x) - b| < \varepsilon \iff f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$





以下は数列の極限と同様に示せる。

定理 4.1 $\lim_{x\to a} f(x) = b$ となるとき この b は1意に決まる。 (教科書 定理 1.5)

定理 4.2 (-1) $f(x)$ が定数関数 $f(x)=c$ のとき、$\lim_{x\to a} f(x) = c$

(0) $f(x)$ が恒等関数 $f(x)=x$ のとき

$$\lim_{x\to a} f(x) = a$$

以下では $\lim_{x\to a} f(x)$ と $\lim_{x\to a} g(x)$ は存在するものとする。

(1) $\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$

7

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$cf : D \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto cf(x)$

$f \pm g : D \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto f(x) \pm g(x)$

$fg : D \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto f(x)g(x)$

$\frac{f}{g} : D_0 \longrightarrow \mathbb{R}$

$D_0 = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

(2) $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

$\left(\| \ \lim_{x\to a} ((f\pm g)(x)) \right)$

(3) $\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

$\left(\| \ \lim_{x\to a} ((fg)(x)) \right)$

(4) $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ のとき

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

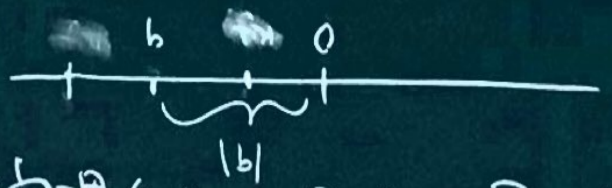
注意 (5)の一部として次が成り立つ：

補題 4.3 $g : D \to \mathbb{R}$ で a は D に接していて、$\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ なら、a は

$D_0 = \{ x \in D \mid g(x) \neq 0 \}$ にも接している。

$\subset D$

証明 $\lim_{x \to a} g(x) = b$ とする $b \neq 0$ ここで任意の $0 < \varepsilon < |b|$ に対して $\delta > 0$ で すべての $x \in D$ で $|a - x| < \delta$ なるものに対して $|f(x) - b| < \varepsilon$ となるものがとれるが、$\varepsilon < |b|$ により、このような x に対し $f(x) \neq 0$ である。したがって a は D_0 にも接している。 ☒



定理 4.4 $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ で

$\lim_{x \to a} f(x)$ と $\lim_{x \to a} g(x)$ が存在し、すべての $x \in D$ (aに十分近い) に対し $f(x) \leq g(x)$ が成り立つなら

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to b} g(x) \text{ が成り立つ}$$

注意 $f(x) < g(x)$ としても $\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x)$ は必ずしも成り立たない！

例 $f(x) = 1$ $g(x) = 1 + x$ $D = (0, \infty)$ とおくと、

「すべての $x \in D$ $f(x) < g(x)$ だが

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = \lim_{x \to 0} g(x)$ である」

定理 4.2 (-1)

（教科書 定理 1.8）

定理 4.5 $f : D \to \mathbb{R}$ a は D に接しているとき,

このとき以下は同値である：

(1) $\lim_{x \to a} f(x) = b$

(2) どんな, a に収束する D の要素からなる数列 $\{a_n\}$ をとっても,

$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = b$

数列 $\{f(a_n)\}$ の極限

注意 この証明には, 選択公理 (Axiom of Choice) とよばれる

19世紀以前の数学ではほとんど使われていない

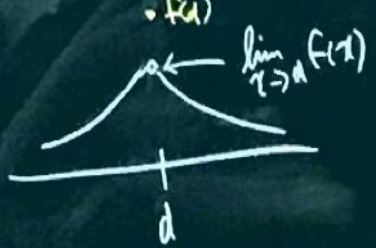
数学の公理が必要になる.

（http://fuchino.ddo.jp/notes/math-notes-elementary.pdf

を参照）

関数の連続性 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ が $d \in D$ で

連続である (continuous) とは, $\lim_{x \to d} f(x) = f(d)$ となること.



では f は d で連続でない!

定理4.6 (−1) D上の定数関数は $d \in D$ で連続である

(0) D上の恒等関数は、$d \in D$ で連続である

(1) f が d で連続なら、cf も d で連続である

(2) f と g が d で連続なら $f+g$ $f-g$ も d で連続である

(3) f と g が d で連続なら fg も d で連続である

(4) 〃 〃 で $g(d) \neq 0$ なら $\frac{f}{g}$ も d で連続である.

証明 …

(1): $\lim_{x \to d} cf(x) = c \lim_{x \to d} f(x) = cf(d) = (cf)(d)$

定理4.1(1)　f は d で連続

(2): $\lim_{x \to d} (f+g)(x) = \lim_{x \to d} f(x) + \lim_{x \to d} g(x) = f(d) + g(d) = (f+g)(d)$

定理4.1(2)　f と g は d で連続

$f: D \to \mathbb{R}$ で $D_0 \subseteq D$ とするとき

f が D_0 (上) で連続 とは すべての $a \in D_0$ で

Continuous on D_0

f が連続なこと.

定数にさも含む

系 4.7 有理関数（多項式を含む 分母にもつような式で定義される関数）は定義域上で連続.

例 (1) $D = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 1, & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(x)$ だから f は 0 で連続でなく

f の 0 での値を 0 に変えるとこの関数は 0 連続になる.

(2) $$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ のとき} \\ 1, & 0 \leq x \text{ のとき} \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しないので f は 0 で連続でないし $f(0)$ をどのように変えても $\underbrace{\text{連続}}_{0\text{で}}$ にならない.